

Lezione 13

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad 1 \leq i, j \leq n$

Def. Sia $\frac{\partial f}{\partial x_j} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Se

esiste $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ allora

lo si denota con

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Se $i = j$ si usa la seguente

notazione: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ 

Se $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N} \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = k$

Avanti 

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

σ sia una qualsiasi permutazione dell'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & \dots & n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \sigma(1) & \sigma(2) & & \sigma(n) \end{array}$$



$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{ordine} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{inverrib, a priori non ci sono} \\ \text{legami tra le due variabili}$$

f $\sim$ $\sim$ $\sim$

Def

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $k \in \mathbb{N}$, $k \leq 2$

$$C^k(\Omega) := \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \forall 0 \leq m \leq k, m \in \mathbb{N}, \right. \\ \left. \frac{\partial^m f}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_n^{a_n}} \text{ sono continue} \right\} \quad \square$$

Teorema di Schwarz (così $k=2$)

Sia $f \in C^2(\Omega)$, $i \neq j$. Allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \square$$

Scambiando gli ordini, non cambia una sega

Teorema di Schwarz generale.

Sia $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Sia $f \in C^k(\Omega)$.

Allora: Per ogni possibile permutazione σ di $\{1, \dots, n\}$ e

$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_n : \sum_{i=1}^n \alpha_i = k$$

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^k f}{\partial x_{\sigma(1)}^{\alpha_{\sigma(1)}} \partial x_{\sigma(2)}^{\alpha_{\sigma(2)}} \dots \partial x_{\sigma(n)}^{\alpha_{\sigma(n)}}} \quad \square$$

Def

Sia $n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Un multiindice

α è un vettore riga n -dimensionale le cui coordinate sono in $\mathbb{N}$ $\square$

$$\mathbb{N}^m \quad (0, 0, 1) \quad (1, 2, 3) \\ (0, 0, 0)$$

Si dice ordine di un multiindice

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ il seguente

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

$$\alpha! := \prod_{i=1}^n \alpha_i! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$$

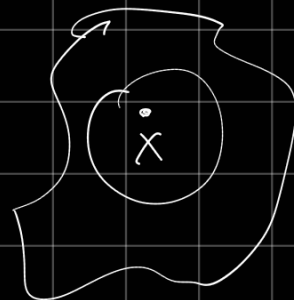
$h \in \mathbb{R}^m$, α multiindice,

$$h^\alpha := \prod_{i=1}^n h_i^{\alpha_i}$$

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto, $h \in C^{k+1}(\Omega)$

Sia $h \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall t \in [-1, 1+\delta]$, $\delta > 0$

$$(x + t h) \in \Omega$$



Sia $\varphi(t) : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(t) = h(x + t h) \quad \text{il che manda } t \text{ in } x + t h$$

OSS,

Se $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$, $g: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$
 $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^k)$, $g \in C^k(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^m)$,
allora $g \circ f \in C^k(\Omega; \mathbb{R}^m)$ $\square$

$$C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k=0}^{+\infty} C^k(\Omega) \quad \square$$

Teorema di Taylor 1-dim

Sia $\psi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^{k+1} . Allora $\forall \bar{x} \in (a, b)$,

$\forall h$ t.c. $\bar{x} + h \in (a, b)$ e:

$$\psi(\bar{x} + h) = \sum_{i=0}^k \frac{h^i \psi^{(i)}(\bar{x})}{i!} + R(\bar{x}, h)$$

con $R(\bar{x}, h) = o(h)^k$

Allora: $\exists \tilde{x}$ t.c. $|\bar{x} - \tilde{x}| < |h|$ e

$\tilde{x}$ deve stare negli estremi di $\bar{x}$ e $\bar{x} + h$

$$R(\bar{x}, h) = \frac{1}{(k+1)!} h^{k+1} \cdot \psi^{(k+1)}(\bar{x})$$

resto di Lagrange

$$\psi'(0) = \sum_{i_1=1}^n D_{i_1} h(x + \epsilon h) \cdot h_{i_1}$$

$$\psi''(0) = \sum_{i_2, i_1=1}^n D_{i_2} D_{i_1} h(x + \epsilon h) \cdot h_{i_2} \cdot h_{i_1}$$

⋮

$$\psi^k(0) = \sum_{i_k, \dots, i_1=1}^n D_{i_k} \dots D_{i_1} h(x + \epsilon h) \cdot h_{i_k} \dots h_{i_1}$$

Sia $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ multi-indice con

$|\alpha| = k$. Sia $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ si dice

C^k .

$$D^\alpha h := D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \dots D_{x_n}^{\alpha_n} h$$

deriva parziale
Variable α , valore...

$$\psi^{(j)}(0) = \sum_{|\alpha|=j} D^\alpha h(x) \cdot \frac{j!}{\alpha!} \cdot h^\alpha$$

indici di ordine j

α_i = ci dice quante volte ζ deriviamo
rispetto alla prima variabile

$$\underbrace{(1 \ 1 \ \dots \ 1)}_{\alpha_1}$$

$$\underbrace{(2 \ 2 \ \dots \ 2)}_{\alpha_2}$$

$$(2 \ 1) \rightarrow \begin{matrix} D_1^2 D_2 f \\ D_2 D_1^2 f \end{matrix}$$