

Lea. 14.

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{i_1, \dots, i_n = 1}^k D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_k} f(x) h_{i_1} \dots h_{i_k} = *$$

n : ordine

Esempio.

Se devo derivare 3 volte

$$\underline{D_1 D_2 D_1} = D_1 D_1 D_2 \quad \text{perché sono nelle ipotesi del Teorema di Schwartz}$$

una delle possibilità

$D_1 D_1 D_1$ altra possibilità

• indici $\rightarrow i_1, i_2, \dots, i_k \rightarrow$ con possibili ripetizioni

* $i_1 i_2 \dots i_s i_s \dots i_n \dots$ ultimo blocco di indici =
 = derivazione rispetto all'ultima variabile

↓
 derivazione rispetto 1^a variabile

↓
 derivazione rispetto 2^a variabile

$\rightarrow$ ho $k!$ modi diversi di disporre questi effetti.

* $\rightarrow \frac{k!}{s! \dots}$

$$i_1 = D_1, i_2 = D_2, i_3 = D_3(?)$$

$$D_1 D_2 D_1 = D_1^{(2)} D_2 \rightarrow \text{con Teo di Schwartz}$$

$$D_{i_1} D_{i_2} D_{i_3} = D_{i_3} D_{i_2} D_{i_1}$$

$$\sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} D^\alpha h(x) \cdot h^\alpha$$

$$|\alpha|=k$$

ordine dell'indice
uguale a k

Esempio

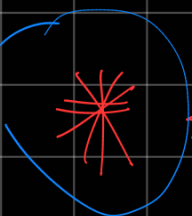
$$m=2$$

$$\sum_{i_1, i_2=1}^2 D_{i_1} D_{i_2} h(x) \cdot h_{i_1} h_{i_2} =$$

$$= D_1 D_1 h(x) h_1 h_1 + D_1 D_2 h(x) \cdot h_1 h_2 + D_2 D_1 h(x) \cdot h_2 h_1 + D_2 D_2 h(x) \cdot h_2 h_2$$

$\frac{2!}{2!} \rightarrow$ tutte possibili permutazioni di elementi.

$\frac{2!}{2!} \rightarrow$ identifico i_1 e i_2 (?)



$$= \sum_{|\alpha|=k} \frac{D^\alpha h(x) \cdot h^\alpha \cdot k!}{\alpha!}$$

$$\varphi(t) = \sum_{j=0}^k \frac{\varphi^{(j)}(0) \cdot t^j}{j!} \rightarrow \varphi(1) = \sum_{j=0}^k \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} =$$

$$= \sum_{j=0}^k \frac{1}{j!} \left(\sum_{|\alpha|=j} \frac{D^\alpha h(x) h^\alpha j!}{\alpha!} \right) + \underbrace{R_k(x, h)}_{\text{resto di ordine } k} =$$

$\rightarrow$ tutti questi fattori $\leq n$ $1+1+1$

$$= R_k(x, h) = \frac{v^{(k+1)}(\bar{t})}{(k+1)!} = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha h(x + \bar{t}h) \cdot h^\alpha}{\alpha!}$$

$$|h^\alpha| = |h^{\alpha_1} \dots h^{\alpha_n}| \leq |h|^{\alpha_1} \dots |h|^{\alpha_n} = |h|^{\sum \alpha_j} = |h|^{|\alpha|} = |h|^{k+1}$$

[Stima] $\left| \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha h(x + \bar{t}h) \cdot h^\alpha}{\alpha!} \right| \leq$

$$\leq \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\max_{|t| \leq 1} |D^\alpha h(x + \bar{t}h)| \cdot |h|^{k+1}}{\alpha!} \leq$$

$$\max_{|\alpha|=k+1} M_\alpha = M \leq M \cdot \sum_{|\alpha|=k+1} |h|^{k+1} = M \cdot |h|^{k+1} \cdot \sum_{|\alpha|=k+1} 1 =$$

$|\alpha|=k+1$, ho introdotto questa notazione

C_{k+1} numero possibili

costante che dipende solo da $k+1$

$$= M \cdot C_{k+1} \cdot |h|^{k+1}$$

$\leftarrow$ dimostro che il resto e' piccolo di $|h|^{k+1}$

Esempio $k=2$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $h \in C^2(\Omega)$

$$h(x+h) = \sum_{|\alpha| \leq 1} \frac{D^\alpha h(x) \cdot h^\alpha}{\alpha!} + R_2(x, h) =$$

// $\bar{x} \in \Omega$, $\bar{x} \in$ sequenza di estremi x e $x+h$

$$H f(x) := (D_i D_j f(x)) \rightarrow \text{matrice simmetrica}$$

x tes. Schwartz

$\hookrightarrow$ Matrice Hessiana

$$= f(x) + \sum_{i=1}^n D_i f(x) \cdot h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n D_i D_j f(\bar{x}) \cdot h_i h_j =$$

$$= f(x) + \underbrace{\nabla f(x)}_{\substack{\downarrow \\ \text{prodotto vettore riga per} \\ \text{vettore colonna}}} \cdot h + \frac{1}{2} \underbrace{(h^T)}_{\substack{\downarrow \\ \text{vettore}}} \underbrace{H f(\bar{x})}_{\substack{\downarrow \\ \text{trasposto di } h \rightarrow \text{vettore riga}}} \cdot \underbrace{(h)}_{\substack{\downarrow \\ \text{vettore}}}$$

prodotto vettore riga per
vettore colonna

vettore

trasposto di $h \rightarrow$ vettore riga

questo prodotto dà vettore

riga $\times$ vettore colonna $\rightarrow$ 1×1 matrice che
identifico con numero
reale

$\hookrightarrow$ Secondo membro: corrispettivo
della derivata seconda 1-dim.