

USIAMO LA FORMULA DI
TAYLOR PER TROVARE I
PUNTI STAZIONARI

21/04/2022
LEZ. 15

1) $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$

2) Ω aperto

3) $f \in C^2(\Omega)$

1 POTESI, SERVANO
DOPO

Def.

Sia f parzialmente derivabile in $\bar{x} \in \Omega$.

Se $\nabla f(\bar{x}) = \vec{0}$, $\bar{x}$ si dice punto stazionario

// $f: A \subseteq \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$. $\bar{x} \in \overset{0}{A}$??

Proposizione

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$. $\bar{x}$ punto stazionario

o A . Se $\bar{x}$ è punto di minimo relativo (massimo relativo)

e f parzialmente derivabile in $\bar{x}$. Allora $\bar{x}$

è punto stazionario

Dim

Sia $B(\bar{x}, \rho) \subseteq A$ e tale che $\bar{x}$ sia di

minimo assoluto per $\tilde{f} = f|_{B(\bar{x}, \rho)}$.

Allora, in particolare, $1 \leq i \leq n$ è un punto di

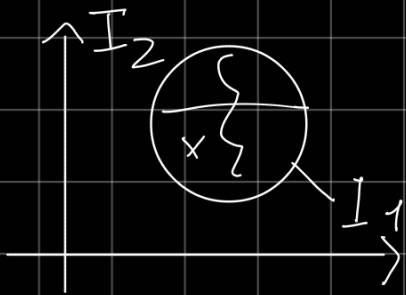
minimo assoluto per $f_i: I_i \rightarrow \mathbb{R}$

$f_i(\bar{x}_1, \dots, x_{i-1}, t, \bar{x}_{i+1}, \dots, x_n)$ con I_i

opportuno intervallo aperto di $\mathbb{R}$. Quindi

si applica il caso unidimensionale delle

proprietà che dà: $\frac{df_i}{dx_1}(\bar{x}) = 0$ $\square$



Prop. più generale

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ e $\bar{x}$ punto interno.

Sia f differenziabile in $\bar{x}$. Sia $\bar{x}$ punto di

min. relativo (o max. relativo risp.)

Allora $df_{\bar{x}} \equiv 0$.

Prop.

Sia A aperto di $\mathbb{R}$. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Sia $\bar{t}$ punto di max relativo min relativo. Sia $f \in C^2(A)$.

Sia $I \subseteq A$ per cui $\frac{d^2 f}{dx^2} \Big|_I \geq 0$ (cons).

Sia $\bar{t}$ stazionario (i.e. $\frac{df}{dx}(\bar{t}) = 0$).

Allora $\bar{t}$ è punto di minimo relativo
(o max rel. risp).

$$\| f(\bar{t} + h) = f(\bar{t}) + \frac{df}{dx}(\bar{t}) \cdot h + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}(\eta) \cdot h^2$$

h^2 con η è intervallo aperto di estremi $\bar{t}$ e $\bar{t} + h$.

$\bar{t}$ punto stazionario, quindi $\frac{df}{dx}(\bar{t}) = 0$

$$f(\bar{t} + h) - f(\bar{t}) = \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2}(\eta) \cdot h^2$$

il mio punto è un punto di min relativo.

prime ipotesi tesione

Matrice Hessiana

è una matrice simmetrica

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. $f \in C^2(\Omega)$.

$$H_{f_x} := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_I} \right)_{1 \leq i, I \leq m}$$

Definirei positività di una matrice:

Sia $M \in M(n \times m)$. Se $\forall \vec{h} \in \mathbb{R}^m$,
 $\vec{h} \neq \vec{0}$, $\vec{h}^T \cdot M \cdot \vec{h} \geq 0$, M è

definita positiva.

Matrice ORTOGONALE

inversa = trasposta

Sia $O \in M(n \times m)$. Se $O^{-1} = O^T$, O si

dice ORTOGONALE.

Le matrici simmetriche si indicano con $Sym(n \times n)$

Prop.

Se $S \in Sym(n \times n)$ allora $\exists$ O ortogonale
 tale che $O^T \cdot S \cdot O$ è diagonale.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$$



$\rightarrow$ coincidono con gli autovalori
 della matrice

Def. Sia $M \in M(n \times n)$. $\lambda \in \mathbb{R}$.

$S_{\lambda} (M - \lambda I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ ha soluzioni non
triv. $\Rightarrow$ non siamo il vettore nullo.

λ si dice AUTOVALORE di M .

* Sia $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = O^T \cdot S \cdot O$

allora $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sono tutti e soli gli
autovalori di S . $\rightarrow$ si possono ripetere

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Prop.

Sia $S \in \text{Sym}(n \times n)$, con la precedente notazione,

$$S \underset{\leq}{\geq} 0 \Rightarrow O^T \cdot S \cdot O \underset{\leq}{\geq} 0$$

Prop.

Sia $S \in \text{Sym}(n \times n)$.

$$\text{Tr}(S) = \text{Tr}(O^T \cdot S \cdot O) \rightarrow \text{Traccia di } S$$

$$\det(S) = \det(O^T \cdot S \cdot O)$$

Proof.

Sia $F: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow M(n \times n)$ continua in

$x \in A$. Sia $F(\bar{x}) > 0$. Allora $\exists r > 0$ per cui

$x \in B(\bar{x}, r) \Rightarrow F(x) > 0 \rightarrow$ Matrice simmetrica
eol x ancora sposta
positiva

Ipotesi: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(\Omega)$.

$\hookrightarrow$ ipotesi * $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

Proposizione.

Valgono *. Sia $\bar{x}$ stazionario. $\exists r > 0$

tales che $\forall x \in B(\bar{x}, r) \subseteq \Omega$

$Hf_x > 0$ ($Hf_x < 0$ rispettivamente).

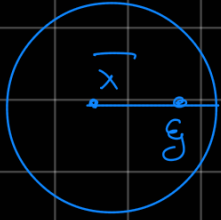
Allora $\bar{x}$ è min relativo (max rel. rispettivamente).

Dim

Se $x \in B(\bar{x}, r)$ ho lo sviluppo di Taylor
multidimensionale.

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x}) \cdot (x - \bar{x}) + \frac{1}{2} (x - \bar{x})^T Hf_{\bar{x}} (x - \bar{x}) + \dots \quad (2)$$

Ovvero g appartiene al segmento di estremo x e $\bar{x}$, quindi in particolare a $B(\bar{x}, \rho)$.



Essendo $\bar{x}$ stazionario, la 2^a diventa

$$h(x) - h(\bar{x}) = (x - \bar{x})^T \cdot H_{h, \bar{x}} (x - \bar{x}) \geq 0$$

e poi $\mathbb{R}^n$ è di così dimensione. $\square$

Ipotesi puntuali (non causale)!

Valgono *. Sia $\bar{x}$ stazionario.

Sia $H_{h, \bar{x}} > 0$ (< 0 rispettivamente.)

$L > \bar{x}$ è di min. relat. ($\circ$ max rel. risp.)

Dim.

$H_{h, \bar{x}}: \Omega \rightarrow M(n \times n)$ è continua.

Da una precedente proposizioni: (conserva il segno)

$\exists \rho > 0: H_{h, B(\bar{x}, \rho)} > 0$ mi sono ricordato
allora prop. precedente.

Caso bidimensionale $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ [con $n=2$]

$S = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$: matrice simmetrica generica in $\mathbb{R}^2$.

$$\text{ho } \text{tr}(S) = a + b = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\det(S) = ab - c^2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

$$\text{Sia } O^T \cdot S \cdot O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = D.$$

OSS.

$$(1) S \geq 0 \Leftrightarrow D \geq 0 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 \geq 0 \Rightarrow ab - c^2 \geq 0$$

$$(2) S \leq 0 \Leftrightarrow D \leq 0 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 \geq 0 \Rightarrow ab - c^2 \geq 0$$

$$(2) ab - c^2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = a + b > 0 \Rightarrow S \geq 0$$

$$(\tilde{\alpha}) ab - c^2 > 0, a + b > 0 \Rightarrow S > 0$$

per avere una matrice definita bisogna
avere $\det \geq 0$ senza COL LAZZO!

Analogamente.

$$(3) ab - c^2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = a + b < 0 \Rightarrow S \leq 0$$

$$(\tilde{\beta}) ab - c^2 > 0, a + b < 0 \Rightarrow S < 0. \quad \square$$

Esempio

Siano α, β numeri reali $\neq 0$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n \text{ e } \alpha, \beta \neq 0 \text{ e } > 0$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2$$

I) Cerco i punti in cui si annulla il
gradiente di f $\nabla f(x, y) = (0, 0)$

$$\nabla f(x, y) = (2\alpha x, 2\beta y)$$

$$\begin{cases} 2\alpha x = 0 \\ 2\beta y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0 \Rightarrow \text{quindi l'unico punto} \\ \text{Stazionario e' l'origine}$$

II) calcolo l'Hessiana

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & 2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

• punto di sella: Se $\alpha \cdot \beta < 0$

Se $\alpha \cdot \beta = 0$ ho un $\max$
o un $\min$.

• Punto di $\min$ relat.: Se $\alpha \cdot \beta > 0$, $\alpha + \beta > 0$

$$\alpha \cdot \beta > 0 \quad 0 \leq \alpha x^2 + \beta y^2$$

$\alpha \cdot \beta > 0$, $\alpha + \beta < 0 \rightarrow$ punto di $\max$ relat.

$$\alpha, \beta < 0$$

$$\underset{f(0,0)}{0} \geq \alpha x^2 + \beta y^2$$

$$\alpha = a^2 > 0$$

$$\beta = -b^2 < 0$$

$$a^2 x^2 - b^2 y^2 = (ax + by)(ax - by)$$

Agendo in maniera meccanica

$$f(x, y) = x^4 + y^4 \quad H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$

al posto di questa funzione possiamo prendere

$$g(x, y) = -x^4 - y^4 \quad H_g(x, y) = \begin{pmatrix} -12x & 0 \\ 0 & -12y \end{pmatrix}$$

In questo caso si vede che H è ≥ 0

$$h(x, y) = x^4 - y^4$$

$$H_h(x, y) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

→ abbiamo una positiva
e una negativa
(CRITERIO)

GENERALIZZAZIONI

1) $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$

2) $\alpha x^2 + \gamma xy + \beta y^2$

$$3) x^2 + cxy + by^2, \quad c, b \neq 0$$

Vediamo dove il gradiente si annulla

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x + cy \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2by + cx \end{aligned} \quad \begin{cases} 2x + cy = 0 \\ 2by + cx = 0 \\ x = -\frac{cy}{2} \\ 2by - \frac{c^2 y}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{c}{2}y \\ (4b - c^2)y = 0 \end{cases}$$

Abbiamo 2 casi:

1° caso:

$$\begin{cases} 2x + cy = 0 \\ c^2 - 4b = 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ tutti i punti di min assoluto,

risulta un quadrato perfetto e diciamo che

$$f(x, y) = \left(x + \frac{c}{2}y\right)^2 + b$$

verifichiamo

$$\hookrightarrow x^2 + cxy + \frac{c^2}{2}y^2 \rightarrow x^2 + cxy + b$$

La retta $2x + cy = 0$ è $\leftarrow b$ tutta di minima assoluto

2° caso $4b - c^2 \neq 0$

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ abbiamo un unico punto
Stazionario.

ora studiamo l'Hessiana.

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2c & \\ & 2b \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il det e le tracce $\text{Det} = 4b \cdot c^2$
 $\text{Tr} = 2(1+b)$

→ Qui ho 3 casi:

- 1° caso: $\text{Det} < 0$ → Sella

- 2° caso: $\begin{cases} 4b - c^2 > 0 \\ 2(1+b) > 0 \end{cases}$ → min relat.

- 3° caso $\begin{cases} 4b - c^2 > 0 \\ 2(1+b) < 0 \end{cases}$ → max relat.

→ quindi si può avere info precise attraverso
determinante e tracce.

Siamo in ipotesi di sufficiente regolarità

$\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow f$ di classe C^1 .

Studiare i punti di max e min equivale a

Stazione il suo quadrato

$$\sqrt[3]{x^2 - y^2}$$

non posso formare il quadrato

Teorema di invertibilità locale

- Diffeomorfismo di classe C^k

Siano $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti. $F: \Omega \rightarrow \Omega'$

Se F è invertibile, $F \in C^k(\Omega, \Omega')$

$F^{-1} \in C^k(\Omega', \Omega)$, F si dice

DIFFEOMORFISMO di CLASSE C^k . $\square$

Teorema. 1° Teo. del DINI /

INVERTIBILITÀ LOCALE

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. $\bar{x} \in \Omega$. Sia $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$

di classe C^1 . Poniamo $\bar{y} = F(\bar{x})$. Sia

$$\det(DF)_{\bar{x}} \neq 0.$$

Allora $\exists$ un intorno aperto V di $\bar{x}$ in

Ω in corrispondenza con un intorno aperto
 W di $\bar{y}$ tale che $F|_V: V \rightarrow W$ è un
diffeomorfismo di classe C^1 $\square$

$\Rightarrow$

Teo.

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto. Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ di
classe C^1 . Sia $f'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$
(per tutti i punti). Allora $\text{Im}(f) = \tilde{J}$ è

un intervallo aperto generalizzato.

$\tilde{f}: \tilde{I} \rightarrow \tilde{J}$. $\tilde{f}(t) = f(t)$ è invertibile,

con $\tilde{f}^{-1}$ di classe C^1 . $\square$

[usare solo in 1-dim]