

Dim Teo del Dimi

22/04/22
LEZ 16

- INIETTIVITA' LOCALE (IN UN INTORNO $\bar{x}$)

Sia $B(\bar{x}, r) \subseteq \Omega$. $F = (f_1, \dots, f_m)^T$

$f_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

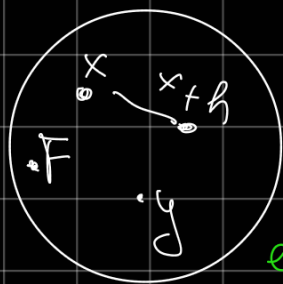
$f_i \in C^1(\Omega)$, $1 \leq i \leq m$. Sono interessato a studiare le funzioni

$$F(x+h) - F(x)$$

- $h \in \mathbb{R}^n$

- $x+h \in B(\bar{x}, r)$

- $x \in B(\bar{x}, r)$



Fissato in qualsiasi x
posso usare le sue composizioni
trovare tutti gli altri elementi.

es $y = x + \underbrace{y-x}_{h}$

~~*~~ Riscrivere componente per componente:

$$F(x+h) - F(x) = (f_1(x+h) - f_1(x), \dots, f_m(x+h) - f_m(x))$$

$$[0,1] \rightarrow \mathbb{R}, t \rightarrow f_i(\bar{x} + th) \text{ con } 1 \leq i \leq m.$$

$$\frac{d f_i(x+th)}{dt} = \sum_{j=1}^n D_j f_i(x+th) \cdot h_j = \nabla f_i(x+th) \cdot h$$

con $t=1$ applico teo. Lagrange.

$$f_i(x+h) - f_i(x) = \frac{df_i}{dt}(x + \vartheta_i h) \cdot h$$

lo posso rinviare:

mmm da 0 a 1 quindi
di 1, $0 < \vartheta_i < 1$

$$\sum_{j=1}^n D_j f_i(x + \vartheta_i h) h_j = \nabla f_i(x + \vartheta_i h) h$$

Definisco la matrice pseudo Jacobiano:

$$(\tilde{D}F)(v_1, \dots, v_m) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(v_1) \\ \vdots \\ \nabla f_m(v_m) \end{pmatrix} \rightarrow \text{perch  } v_1, \dots, v_m \text{ un} \\ \text{ho dei vettori di } P.$$

Studiamo il det della matrice:

$$\delta := \det(\tilde{D}F)(v_1, \dots, v_m) \quad \delta \text{ valutato in } \bar{x} \rightarrow \delta(\bar{x}, \dots, \bar{x}) \neq 0$$

$$\delta: \Omega^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\delta \text{   continua.}$$

perch  $\delta(\bar{x}, \dots, \bar{x})$ coincide con
il $\det(\tilde{D}F)(\bar{x})$.

• Per il Teorema di permanenza del segno $\exists \rho > 0$ t.c.
 $\forall 1 \leq i \leq m$ e $v_i \in B(\bar{x}, \rho)$ e $|\delta(v_1, \dots, v_m)| \neq 0$

OSS.

• Sia $\exists ! 0$ (?) $x+h \in B(\bar{x}, \rho)$

$$\|x - (x + \vartheta_i h)\| = \| - \vartheta_i h \| = \|h\| < \rho \quad \text{dis. triangolo}$$

• Quindi $\delta(x + \vartheta_1 h, \dots, x + \vartheta_m h) \neq 0$ perch  $x + \vartheta_i h \in B(\bar{x}, \rho)$

- Quindi $(\widetilde{DF})(x+v_1 h, \dots, x+v_n h)$ è non singolare
- Poniamo $V = B(\bar{x}, \rho)$.

DEVO DIM. CHE F_V È INIETTIVO.

$$\text{Sia } h = y - x \rightarrow F(y) - F(x) = F(x+h) - F(x) =$$

$$\vec{0} = \underbrace{(\widetilde{DF})(x+v_1 h, \dots, x+v_n h)}_{\text{matrice non singolare}} h$$

OSS. Se $A \in M(n \times n)$ non singolare, allora

$$A \cdot z = \vec{0} \Leftrightarrow z = \vec{0} \quad \square$$

$$\text{Quindi la * } e' = \vec{0} \quad h = \vec{0}$$

$\Rightarrow$ Allora F_V è INIETTIVO

Esempio di mappe globali invertibili anche se $\det(DF_x) \neq 0$

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)^T \quad \text{non è globalmente invertibile}$$

$$\begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix} \quad \text{calcolo del det}$$

$$\det((DF)(x, y)) = e^x (\cos^2 x + \sin^2 y) = e^x \neq 0.$$

In ogni punto verifica il Teorema del Dini ma
può che globalmente invertibile localmente abbiamo
invertibilità, ma non globalmente

- Ragionamento sulla suriettività locale:

- Dimostrerò che, se V è un intorno aperto di
 $\bar{x}$, in cui $F|_V$ è invertibile

Allora $\exists$ intorno W aperto di $y = F(x)$ tale che

$W \subseteq F(V)$ e in più $F(x) = y$ ha una (e una sola)
soluzione per $y \in W$ e per $x \in F^{-1}(W)$

- Introduciamo questa funzione:

$\forall y \in \mathbb{R}^m$ sia $\psi(\cdot, y)$ parametro

$$\psi: (V) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\psi(x, y) = \|y - f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^m (y_i - f_i(x))^2$$

- Calcoliamo la derivata parziale j -esimo di
 ψ :

$$\frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^m 2 (f_i(x) - y_i) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j} =$$

$$= 2 \sum_{i=1}^m \left[(DF)_{j^T}^T(x) \cdot (F(x) - y)_i \right] \quad \text{vettore colonna}$$

↳ Otteniamo la matrice Jacobiana

= Facciamo il prodotto tra

$$= 2 \left[(DF)_x^T \cdot (F(x) - y) \right]_y =$$

$$= 2 \left[(DF)_x^T \cdot (F(x) - y) \right]_y =$$

$$= - \left[\nabla_x \varphi(x, y) \right]^T = 2 (DF)_x^T \cdot (F(x) - y) \quad \square$$