

$\forall y \in \mathbb{R}^m$ fissato

V intorno di $\bar{x}$

$$\psi : V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}\psi(x, y) &= \|y - F(x)\|^2 = \\ &= \sum_{j=1}^m (h_j(x) - y_j)^2\end{aligned}$$

$$\nabla_x^T \psi(x, y) = 2 (DF)_x^T (F(x) - y)$$

Ricondiamo che in V DF_x è non singolare,
così come DF_x^T

Quindi

$$\nabla_x \psi(x, y) = \vec{0} \Leftrightarrow F(x) = y.$$

Sia $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo che
 $\overline{B}(\bar{x}, \varepsilon) \subseteq V$

$\psi|_{\overline{B}(\bar{x}, \varepsilon)}$ è continuo in un compatto

$\forall y \in \mathbb{R}^n$. Quindi, per il Teo.
di Weierstrass ammette minimo assoluto

L'idea è la seguente: dimostrare che esiste
un $\delta > 0$ sufficientemente piccolo perché il
punto di minimo per $\psi|_{\overline{B}(\bar{x}, \varepsilon)}$ sia contenuto
in $B(\bar{x}, \varepsilon)$, $\forall y \in B(\bar{y}, \delta)$

In tal caso $\nabla_x \psi(x, y) = \vec{0} \Leftrightarrow F(x) = y$

Def.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto.

Una $G: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ si dice uniformemente

continua se G è continua e se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } \forall x_1, x_2 \in A, \|x_1 - x_2\|_n \leq \delta_\varepsilon$$

$$\Rightarrow \|G(x_1) - G(x_2)\| \leq \varepsilon \quad \square$$

uniformi dell'intera vicini dei punti dell'insieme

Proof -

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto e compatto

Sia $G: A \rightarrow \mathbb{R}^k$ continua. Allora G è anche uniformemente continua. $\square$

oss.

$\forall r > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } x_1, x_2 \in \overline{B}(\bar{x}, \varepsilon)$

$$\|x_1 - x_2\| < \delta, \|y - \bar{y}\| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\varphi(x_1, y) - \varphi(x_2, y)| \leq \frac{1}{4} r \quad \square$$

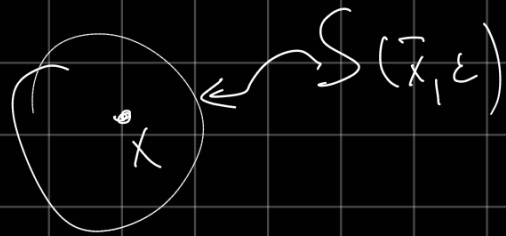
$$G = \varphi|_{\overline{B}(\bar{x}, \varepsilon) \times \overline{B}(\bar{x}, \frac{1}{4} r)}$$

① Fissiamo $y = \bar{y}$, allora

$\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Consideriamo ora

$\varphi(x, \bar{y})$ rispetto a

$$S(\bar{x}, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{B}(\bar{x}, \varepsilon) : \|x - \bar{x}\| = \varepsilon\}$$



$S(\bar{x}, \varepsilon)$ è compatto, quindi

$\psi(x, y) | S(\bar{x}, \varepsilon)$ ammette valore di

min. ass. Poniamo questo valore r .

$$F(x) - y = \vec{0}$$

$$(\bar{x}, \bar{y})$$

$r > 0$ poiché

$S(\bar{x}, \varepsilon) \subseteq V$ intorno
di insiemi aperti, quindi

Solo la coppia $(\bar{x}, \bar{y})^T$ risolve

$$F(x) - \bar{y} = \vec{0} \Leftrightarrow \psi(x, \bar{y}) = 0$$

Quindi, $\forall x \in S(\bar{x}, \varepsilon) \quad \psi(x, \bar{y}) \geq r > 0$

(2) Sia ora $y \in B(\bar{y}, \delta)$ e $x \in S(\bar{x}, \min(\varepsilon, \delta))$

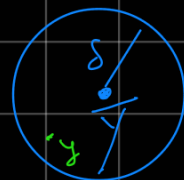
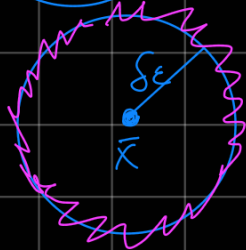
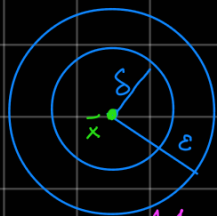
appiungo e sommo una quantità

$$\psi(x, y) = \psi(x, \bar{y}) + (\psi(x, y) - \psi(x, \bar{y}))$$

$$\geq r - \frac{r}{4} = \frac{3}{4} r$$

$$\psi(x, y) - \psi(x, \bar{y}) \geq -|\psi(x, y) - \psi(x, \bar{y})| \geq -\frac{r}{4}$$

$$\min(\delta, \varepsilon) = \delta_\varepsilon$$



qualunque y che scegli, la funzione distolte al bordo è sicuramente maggiore di $\frac{3}{4}r$

③ Sia $y \in B(\bar{y}, \delta)$ $\circ$

$$\psi(\bar{x}, y) = \psi(\bar{x}, y) - \underbrace{\psi(\bar{x}, \bar{y})} =$$

$$|\psi(\bar{x}, y) - \bar{\psi}(\bar{x}, \bar{y})| \leq r/4$$

②-③ $\Rightarrow$ il punto di min asse per $\psi(\cdot, y) : \overline{B(\bar{x}, \delta_\varepsilon)} \rightarrow \mathbb{R}$ deve essere interno.

Allora $\nabla_x^\top \psi(x, y) = \vec{0} \Leftrightarrow F(x) = y$

In particolare: $F^{-1}(B(\bar{y}, \delta)) \subseteq B(\bar{x}, \delta_\epsilon)$

Prendiamo $\tilde{V} = F^{-1}(B(\bar{y}, \delta))$.

Allora $F|_{\tilde{V}}: \tilde{V} \rightarrow B(\bar{y}, \delta)$ inversa continua

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1

$$\{x \in \Omega \mid f(x) = 0\}$$

$$a_n x_n + a_{n-1} x_{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 = 0$$

Supponiamo che $a_n \neq 0$

$$x_n = \frac{-1}{a_n} (a_{n-1} x_{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0)$$

Tutti i punti che verificano questa eq., sono i punti del grafico della funzione lineare (e affine) da $\mathbb{R}^{n-1}$ a valori in $\mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) \neq 0$$

La retta tangente al grafico della funzione

Teorema del DNI 2

Teorema della funzione implicita

Caso a Codominio 1 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, insieme aperto.

Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1

Sia $M := \{ (x_1, \dots, x_n) \in \Omega : f(\vec{x}) = 0 \}$

Sia poi $\vec{x} \in \Omega$ t.c. $\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \neq 0$.

Posto per cui $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\vec{x}_n = (x_1, \dots, x_{n-1})^T \in \mathbb{R}^{n-1}$

esistono due intorni aperti di $\vec{x}_n$ in $\mathbb{R}^{n-1}$ e

di x_n in $\mathbb{R}$, denotati con

$V_{\vec{x}_n}$ e W_{x_n} rispettivamente.

e quindi un intorno aperto di

$\vec{x}$, denotato con $D_{\vec{x}} = V_{\vec{x}_n} \times W_{x_n}$,

ed esiste una $\psi: V_{\vec{x}_n} \rightarrow W_{x_n}$

di classe C^1 t.c.

1) $M \cap D_{\vec{x}} = \{ (\vec{x}_n, x_n) : \psi(\vec{x}_n) = x_n \}$ □

$$M = \{ (x, y)^T : x + y = 0 \}$$

$$h(x, y) = (x + y)^2, \quad \frac{\partial h}{\partial y} = 2(x + y)$$

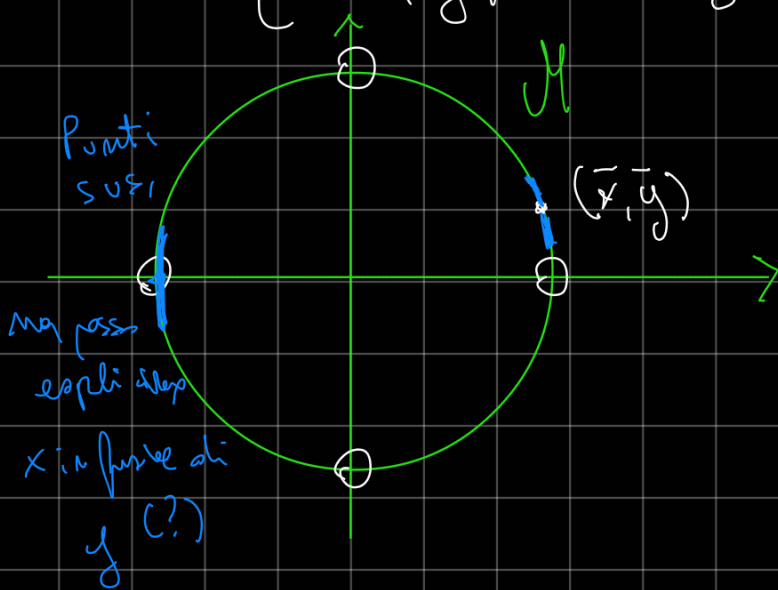
$$h(x, y) = 0 \quad (x + y)^2 = 0$$

$$x + y = 0 \Leftrightarrow y = -x$$

$$x^2 + y^2 - 1 = h(x, y)$$

$$M = \{ (x, y)^T : x^2 + y^2 = 1 \}$$

conc. di: r. 1



$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 2x$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = 2y$$

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$y = -\sqrt{1 - x^2}$$

$$y > 0$$

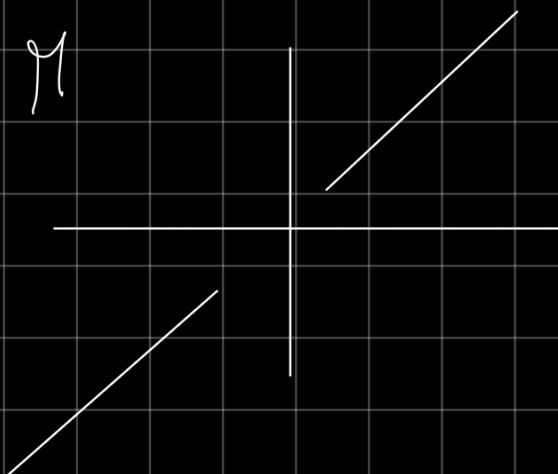
$$h(x, y) = e^x + \ln y + y \quad \Omega = \mathbb{R}_x \times (0, +\infty)$$

$$M = \{ (x, y)^T : e^x = -\ln y + y \}$$

$$h(x, y) = e^x + \ln y + y + x$$

$$H = \{(x, y) : e^x = -\ln y - y - x\}$$

$$e^x + x = H$$



$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{1}{y} + 1$$

sempre positiva

$$\frac{\partial h}{\partial x} = e^x + 1$$

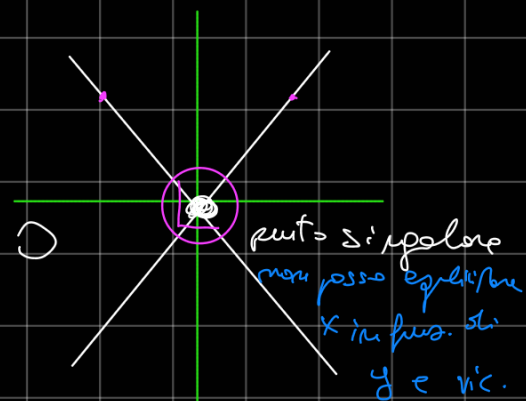
sempre > 1

posso esplicitarla
localmente, x in
funzione di y , sia y in
funzione di x , senza avere
la forma esplicita.

posso esplicitarla con una funzione di classe C

$$h(x, y) = y^2 - x^2$$

$$0 = y^2 - x^2 = (y+x)(y-x) = 0$$



$$\frac{\partial h}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial h}{\partial x} = -2x \quad y = x \text{ oppure } y = -x$$

Teorema (Secondo Teorema del Dini)

Situazione generale

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, aperto. Sia k intero
 $1 \leq k \leq n$.

Rappresentiamo un generico vettore $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

come $\vec{x} = (x', x'')^T$, con x' vettore riga

$(n-k)$ -dimensionale formato dalle prime $(n-k)$ componenti

di $\vec{x}^T$, x'' vettore riga k -dimensionale formato

dalle ultime k componenti.

$$x^T = (x', x'')$$

non mette più $\rightarrow$ sui vettori
perché mi sono rotto il collo.

$$x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-k}), \quad x'' = (x_{n-k+1}, \dots, x_n)$$

$$x^T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\text{Sia } \bar{x} = (\bar{x}', \bar{x}'') \in \Omega$$

$$\text{Sia ora } h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad h = (h_1, \dots, h_k)^T,$$

funzione vettoriale

$$h_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq k, \quad h_i \text{ di classe } C^1$$

$$\text{Sia per } h(\vec{x}) = \vec{0} \in \mathbb{R}^k$$

$$\text{Poniamo } M_i := \{x \in \Omega : h_i(x) = 0\} \quad \text{e}$$

$$M = \bigcap_{i=1}^k M_i = \{x \in \Omega : h_i(x) = 0, \quad 1 \leq i \leq k\}$$

Esista poi una scelta di K coordinate, che a meno di un riordinamento possiamo porre le prime K componenti $x_1, \dots, x_K$, per cui il

il minore $K \times K$ della matrice Jacobiana

$(Df)_{\bar{x}}$ ottenuto scegliendo le prime K

colonne, che denotiamo con

$$\frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial (x_1, \dots, x_K)}(\bar{x}) \quad \text{sia non singolare}$$

K righe e (n) colonne, $\# \text{ colonne} > \# \text{ righe}$.
 Scegli le prime K colonne, riprende il minore, matrice $K \times K$ quadrata, non singolare ($\det \neq 0$).

Allora esiste un intorno aperto

$V_{\bar{x}'}$ di $\bar{x}'$ in $\mathbb{R}^{n-k}$, ed esiste un intorno aperto $W_{\bar{x}''}$ di $\bar{x}''$ in $\mathbb{R}^k$, e quindi un intorno

aperto $D_{\bar{x}} = V_{\bar{x}'} \times W_{\bar{x}''}$ di $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$

ed esiste una funzione $\gamma: V_{\bar{x}'} \rightarrow W_{\bar{x}''}$ di classe C^1

t.c. $M \cap D_{\bar{x}} = \{ (x', x'')^T \in D_{\bar{x}} : x'' = \gamma(x') \}$.

$$\frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial (x_{n-k+1}, \dots, x_n)}(\bar{x}) = \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x^k}$$

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.

$g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ in classe C^1 e tale che $\forall x \in \Omega$

$$\nabla g^T(x) \neq 0^T \quad \text{esiste almeno una der. parziale che sia } \neq 0.$$

Poniamo, sotto le ipotesi (*), $M = \{x \in \Omega: g(x) = 0\}$

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1

$$1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Teorema (Massimi e minimi vincolati)

Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 .

Sia M come prima.* Sia

Sia $\bar{x} \in M$ un punto di massimo o minimo

relativo per $f|_M$. Allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$

della moltiplicazione di Lagrange, tale che

$$\nabla h(\bar{x}) = \lambda \nabla g(x) \quad \square$$

For $1 \leq k \leq m-1$, $k \in \mathbb{N}$. Siano

$g_1, \dots, g_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni che verificano (*)

Poniamo $M_g := \{x \in \Omega : g_g(x) = 0\}$

$$M := \bigcap_{g=1}^k M_g$$

Supponiamo $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1

$$\begin{pmatrix} \nabla g_1(x) \\ \vdots \\ \nabla g_k(x) \end{pmatrix} \text{ di rango } k.$$

Sia $\bar{x} \in M$ punto di max o min relativo per

$h|_M$.

Allora $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tali che

$$\nabla h(\bar{x}) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \nabla g_j(\bar{x}) \quad \text{combinazione lineare}$$

k singoli, gradiente $\bar{x}$, max o min relativo. i λ sono i moltiplicatori di Lagrange.

