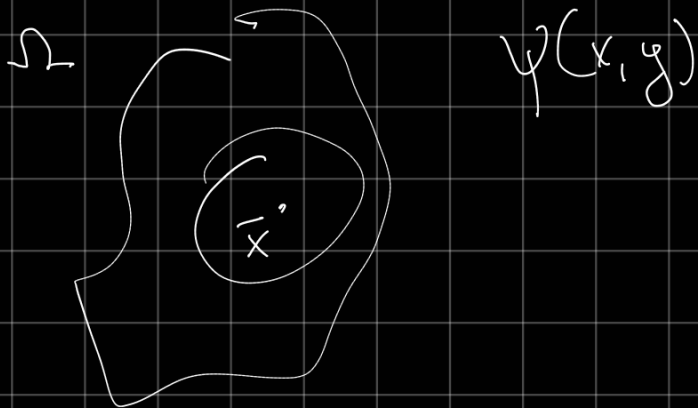


$$|y - \bar{y}| \leq \delta$$

$$x \in S(\bar{x}, \varepsilon) \quad \text{ANALIZ LEZ 19}$$



$$W = B(\bar{y}, \delta)$$

$$B(\bar{x}, \varepsilon) \cap F^{-1}(B(\bar{y}, \delta))$$

$$F|_V : V \rightarrow B(\bar{y}, \delta)$$

Successioni e Serie di funzioni

$$S \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$S \neq \emptyset$$

$$[x, \alpha]$$

$$(x_n)_{n \rightarrow \infty} \quad \text{Successione di elementi dello spazio metrico}$$

funzione che ad ogni n associa un x_n

$$\forall k \in \mathbb{N}$$

$$\text{sia } f_k : S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$$

è una generica successione di funzioni

OSS $\forall x \in S, (f_k(x))$ è una successione numerica
per ogni k abbiamo un numero

Def. Sia (f_k) successione di funzioni.

Essa si dice convergere puntualmente in $\tilde{S} \subseteq S$ se $\forall x \in \tilde{S}$ la successione numerica $(f_k(x))$ converge $\square$

es. $S = \mathbb{R}$

$$f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_k(x) = x^k$$

(1) se $|x| < 1$, $(f_k(x)) \rightarrow 0$

$$|x^k| = |x|^k \rightarrow 0$$

(2) se $x = 1$, $(f_k(x)) = (1) \rightarrow 1$

(3) se $x > 1$, $(f_k(x)) \rightarrow +\infty$

(4) se $x = -1$, $(f_k(x)) = ((-1)^k)$ oscilla tra 1 e -1 non ammette limite

(5) se $x < -1$, $(f_k(x))$ non ammette limite

$\tilde{S} = [-1, 1]$; se $x \in \tilde{S}$, $f(x) := \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x)$ funzione limite puntuale

Def.

Il più grande $\bar{S}$ in cui $(f_k(x))$ converge
 se $x \in \bar{S}$ è detto insieme di convergenza puntuale

La funzione $f: \bar{S} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x)$
 si dice limite puntuale di (f_k) $\square$

Esempi SOS

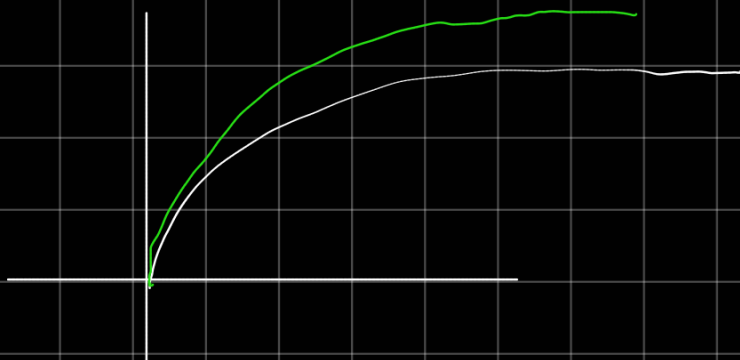
$$f_k: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$$S = [0, +\infty), \quad f_k(x) = \sqrt[k]{x} = x^{\frac{1}{k}}$$

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1$$

$$x > 0, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{k}} = 1$$



discontinua nella 0

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{in } 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Def Sia (f_k) successione di funzioni.

Essa si dice convergere uniformemente in

$\tilde{S} \subseteq S$ se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{k}_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{f.c.} \quad \text{se } k \geq \bar{k}_\varepsilon \quad \text{allora}$

$$\sup_{x \in \tilde{S}} |f(x) - f_k(x)| \leq \varepsilon \quad \square$$

Equivalentemente se

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\sup_{x \in \tilde{S}} |f(x) - f_k(x)| \right] = 0$$

Vogliamo valutare uniformemente questa differenza, e non punto per punto. Qui è sempre vero che prima di un $\varepsilon \dots$ in qualche modo questo senza il sup.

Oss. Se (f_k) converge puntualmente in $\tilde{S}$, allora $\forall x \in \tilde{S}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{k}_\varepsilon(x) \in \mathbb{N} \quad \text{f.c.} \quad \text{se } k \geq \bar{k}_\varepsilon(x) \text{ allora}$

$$|f_k(x) - f_k(x)| \leq \varepsilon \quad \square \quad \text{di volta in volta}$$

qui l'indice dipende
da x e non ogni
 x appartenente...

OS (f_k) converge uniformemente in S

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{k}_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{per cui}$$

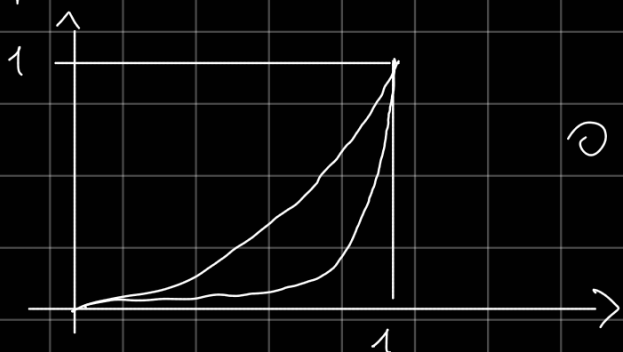
$$\forall x \in S \quad k \geq \bar{k}_\varepsilon \Rightarrow |f_k(x) - f_k(x)| \leq \varepsilon \quad \square$$

questo = Trovare un solo indice per tutte le x
poiché la dipendenza dalla x .

OS. $(f_n) \xrightarrow{\text{unif.}} f \Rightarrow (f_n) \xrightarrow{\text{point.}} f \quad \square$

$S = [0, 1]$ $f_k: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_k(x) = x^k$

$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$



$$0 \leq f_k(x) - f(x) \begin{cases} \xrightarrow{1} 0 & \text{se } x = 1 \\ \xrightarrow{x^k} x^k & \text{se } x \neq 1 \end{cases}$$

Per ogni k fissato

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (p_k(x) - p(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^-} p_k(x) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0,1]} |p(x) - p_k(x)| = 1$$

fissiamo un k e avviciniamo ad 1, tendiamo ad 1.
il sup è proprio 1

Sia $1 > \delta > 0$

$$S_\delta = [0, 1-\delta]$$

$$g_k : S_\delta \rightarrow \mathbb{R}, g_k(x) = x^k$$

OSS $(g_k) \xrightarrow{\text{unif}} 0$

Dim.

$$|g_k(x) - 0| = g_k(x) = x^k \leq (1-\delta)^k$$

Quindi $\sup_{x \in S_\delta} |g_k(x) - 0| = \max_{x \in S_\delta} |g_k(x) - 0| =$
 $= (1-\delta)^k \rightarrow 0$

Def.

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto. Sia $f: S \rightarrow \mathbb{R}$

limitato.

Allora poniamo

$$\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in S} |f(x)| \quad \square$$

Prop.

Sia $L^{\infty}(S) := \{f: S \rightarrow \mathbb{R} \text{ limitato}\}$

Allora $\|\cdot\|_{\infty}$ è una norma su $L^{\infty}(S)$. $\square$

Dim. che è una norma

$$\textcircled{1} \|f\|_{\infty} = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in S} |f(x)| = 0 \Rightarrow |f(x)| \leq 0, \forall x \in S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in S$$

$\Leftarrow$ banale

$$\textcircled{2} \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda f\|_{\infty} = |\lambda| \cdot \|f\|_{\infty}.$$

$$\forall x \in S \quad |\lambda f(x)| = |\lambda| |f(x)|$$

Erweitern:

$$\sup_{x \in S} |\lambda f(x)| = \sup_{x \in S} [|\lambda| \cdot |f(x)|] =$$

$$= |\lambda| \sup_{x \in S} |f(x)|$$

(3) $\|f+g\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}$ dissep. bring.

$\forall x \in S$

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \sup_{z \in S} |f(z)| + \sup_{z \in S} |g(z)| =$$

$$= \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}$$

$$\sup_{x \in S} [|f(x)+g(x)|] \leq \|f\|_{\infty} + \|g\|_{\infty}$$