

Lez. 20.

Prop.

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto. Sia

(f_m) una successione di funzioni limitate che sia di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_\infty$.

// f limitata

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in S} |f(x)|$$

Allora esiste ed è unica $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$f_k \xrightarrow{\text{unif}} f \quad \square$$

Dim

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : m, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|f_m - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$$

① $\forall x \in S, (f_m(x))$ è di Cauchy

$$\text{Di fatti: } |f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty.$$

Allora $\forall x \in S \quad (f_k(x)) \rightarrow f(x)$.
 limite puntuale $\nearrow$ per il criterio
 perché succ.
 numerica di
 Cauchy

$$n, m \geq n_\varepsilon$$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

prendo il sup,
 e proviamo
 questa diseg.

$$\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$$

Quindi: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad s.e.$

$$n \geq n_\varepsilon \text{ allora } \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$$

$$f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$$



Prop.

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto. Sia $f_n: S \rightarrow \mathbb{R}$,

$f_n \in C^0(S)$, $(f_n) \xrightarrow{\text{unif}} f$. Allora $f \in C^0(S)$. $\square$

Dim

Sia $\bar{x} \in \text{Acc}(S) \cap S$.

Allora $\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f_n(x) = f(\bar{x})$

Vediamo:

$$|f(\bar{x}) - f(x)| =$$

colgo e esprimo cose random

$$| \underbrace{f(\bar{x}) - f_n(\bar{x})}_{\text{utilizziamo la}} + \underbrace{f_n(\bar{x}) - f_n(x)}_{\text{triangolo}} + \underbrace{f_n(x) - f(x)}_{\text{negoziazione}} | \leq$$

utilizziamo la

triangolo negoziato

$$\leq |f(\bar{x}) - f_n(\bar{x})| + |f_n(x) - f(x)| + |f_n(\bar{x}) - f_n(x)|$$

$$|f(x) - f(x)| \leq |f(\bar{x}) - f_n(\bar{x})| + |f_n(x) - f(x)| + |f_n(\bar{x}) - f_n(x)|$$

Sia n_ε t.c. se $n \geq n_\varepsilon$ allora $\|f - f_n\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Se $n \geq n_\varepsilon$, allora

$$|f(\bar{x}) - f(x)| \leq |f_n(\bar{x}) - f_n(x)| + \frac{\varepsilon}{3} \varepsilon$$

Quindi fissiamo un $n \geq n_\varepsilon$. Allora

$\exists \delta_3 > 0$ t.c. se $|x - \bar{x}| \leq \delta_\varepsilon$ allora

$$|f_n(\bar{x}) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Fisso $\frac{\varepsilon}{3}$... Weierstrass

Allora $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \varepsilon > 0 \text{ t.c. } s.e$

$$|x - \bar{x}| \leq \delta \varepsilon, \text{ allora } |h(\bar{x}) - h(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{3} \varepsilon = \varepsilon \quad \square$$

$$I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$$

Prop. Siano $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

f_n Riemann-integrabile, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Sia $(f_n) \xrightarrow{\text{unif}} f$.

Allora f è Riemann-integrabile.

* Inoltre, posta $F_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt, \quad F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad (F_n) \xrightarrow{\text{unif}} F \quad \square$$

Dim di *

$$|F_n(x) - F(x)| = \left| \int_a^x f_n(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| =$$

$$= \left| \int_a^x (f_n(t) - f(t)) dt \right| \leq$$

S₂ $x > a$

$$\left| \int_a^x g(t) dt \right| \leq \int_a^x |g(t)| dt$$

$$\leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)| dt \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \quad \text{non negativo}$$

sfrutto il fatto che la f è non negativa

$$(f_n) \xrightarrow{\text{unif}} f \Rightarrow \left(\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \text{ t.c. se } n > n_\varepsilon \text{ allora } \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{(b-a)} \right)$$

in realtà non serve
continuare teo del confronto

$n > n_\varepsilon$ allora

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{(b-a)}$$

$$\leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty dt = \text{qui } |f_n - f| \leq \text{del sup su } t \in \text{intervallo}$$

$$= (b-a) \cdot \|f_n - f\|_\infty$$

Allora, passando al sup su $t \in [a, b]$:

$$\|F_n - F\|_\infty \leq (b-a) \cdot \|f_n - f\|_\infty$$

$\rightarrow 0$

$$\Rightarrow \text{Per teo del confronto } F_n \xrightarrow{\text{unif}} F \quad \square$$

