

Prop.

Siano $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f_n di classe C^1 . Sia $(f'_n) \xrightarrow{\text{unif}} g$. Sia inoltre $(f_n(\bar{x})) \rightarrow \bar{y}$, per un $\bar{x} \in [a, b]$. Allora $(f_n) \xrightarrow{\text{unif}} f$, $f \in C^1([a, b])$ e $f' = g$. $\square$

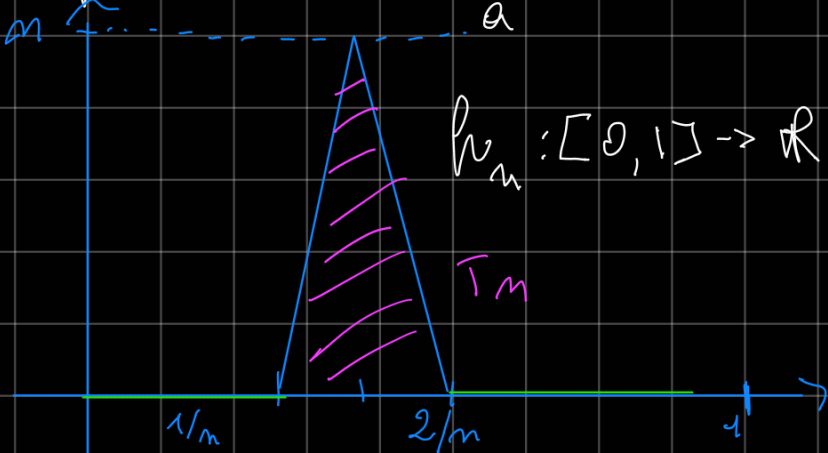
Dim.

$$f_n(x) = f_n(\bar{x}) + \int_{\bar{x}}^x f'_n(t) dt \xrightarrow{\text{unif}} \bar{y} + \int_{\bar{x}}^x g(t) dt = f(x)$$

applicando teo fond. calcolo integrale $\square$

Oss.

La sola convergenza puntuale di funzioni $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrabili ad una f Riemann-int. non implica che $\int_a^x f_n(t) dt$ converga a $\int_a^x f(t) dt$. $\square$



convergente puntualmente a 0, se prendi n suff. grande sarai puntualmente nullo

(f_n) ^{puntualmente} $\rightarrow 0$ ma non uniformemente, in fact,

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in [0,1]} f_n(x) = \max_{x \in [0,1]} f_n(x) = n$$

Iniziali $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - 0\|_{\infty} = +\infty!$

Ora: $\int_0^1 f_n(t) dt = \text{Area}(T_n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2} =$

$$= \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \neq \int_0^1 0 dt \quad \square$$

Prop.

Sia $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n \in \mathcal{R}([a, b])$

Sia $f_n \xrightarrow{\text{p.mente}} f \in \mathcal{R}([a, b])$. Esista una

$G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $G \in \mathcal{R}([a, b])$,

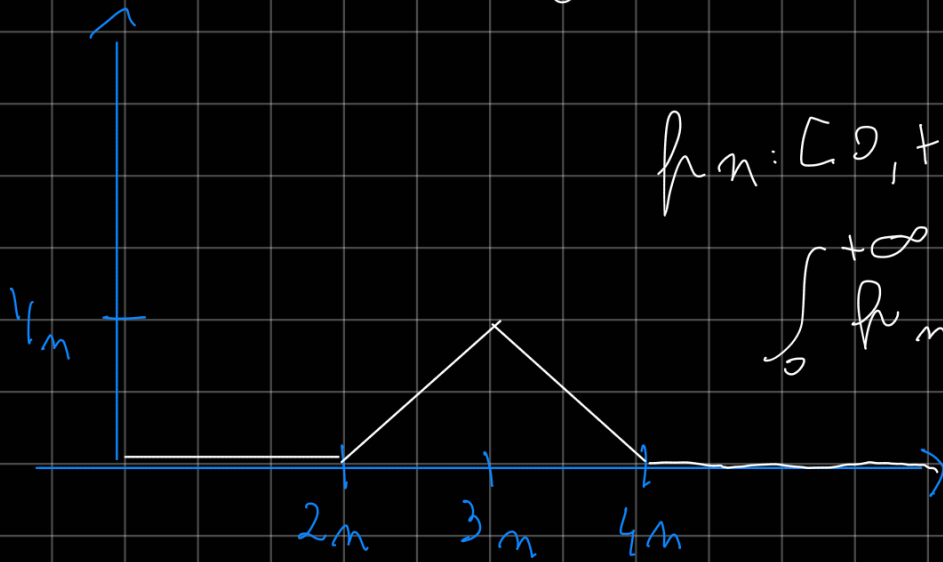
$|f_n| \leq G, \forall n \in \mathbb{N}$.

Allora $\int_a^x f_n(t) dt \rightarrow \int_a^x f(t) dt,$

$\forall x \in [a, b] \quad \square$

$$h: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad h|_{[0, b]} \in \mathcal{R}([0, b])$$

$$\exists \text{ finito } \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b h(t) dt$$



$$h_n: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\int_0^{+\infty} h_n(t) dt = 1 \neq 0 = \int_0^{+\infty} 0 dt$$

limite

$$Oss \quad (h_n) \xrightarrow{\text{unif}} 0. \quad \text{Difatti } \|h_n - 0\| = \infty$$

$$= \sup_{x \in [0, +\infty)} h_n = \max_{x \in [0, +\infty)} h_n(x) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Se dominio è

il limitato il Teorema non vale.

$$(h_n)$$

$$h_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad h_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \in C([0, 1])$$

$$h_n \xrightarrow{\text{unif}} |x|$$

$$0 \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} = \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \leq \frac{1}{n}$$

$$\leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

Calcoliamo le derivate

$$f_n(x) = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}}$$

Controesempio:

$$(f_n) \xrightarrow{\text{unif}} f \in C^1 \quad \text{ma} \quad f'_n \not\xrightarrow{\text{unif}} f'$$

convergenza uniforme di una certa f_n , ma non c'è una convergenza neanche puntuale delle derivate prime.

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(n^2 x) \quad (f_n) \xrightarrow{\text{unif}} 0$$

Difatti:

$$|f_n(x) - 0| = \left| \frac{1}{n} \sin(n^2 x) \right| \leq \frac{1}{n}$$

$$\|f_n - 0\|_{\infty} \rightarrow 0$$

$$f'_n(x) = \frac{1}{n} n^2 \cdot \cos(n^2 x) = n \cos(n^2 x) \quad \text{non converge unif. a niente.}$$

$$\sim f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nx)$$

Sono $\sin nx$ o seno nell'intervallo $[-1, 1]$ per

INTRODUCIAMO LE SERIE

Sia (a_n) successione numerica.

$$S_k := \sum_{n=0}^k a_n = a_0 + a_1 + \dots + a_k$$

$$(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leftarrow \text{può essere successione delle somme k-esime o il limite qualcosa esista.}$$

Es. $n \geq 1$ $a_n = \frac{1}{n}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \quad \text{serie armonica.}$$

Def.

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto. Sia (f_n) successione

di funzioni, $f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$. Allora è ben

definito il concetto di serie di funzioni il

cui termine n-esimo è f_n nel seguente modo.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n := (S_k)_{k \in \mathbb{N}}, \text{ dove } S_k := p_0 + \dots + p_k = \sum_{n=0}^k p_n. \quad \square$$

OSS.

$$\forall x \in S, \sum_{n=0}^{+\infty} p_n(x) \text{ è una successione} \quad \square$$

OSS.

$$\text{Sia } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ serie numerica t.c.}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty. \text{ Allora } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ è convergente} \quad \square$$

↑
Serie assolutamente convergente.

Se converge esplicitamente $\Rightarrow$ converge

Controesempio $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

Criterio del confronto per serie numeriche.
Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ con $\forall a_n \geq 0$. Sia, definitivamente, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n < +\infty$. Allora

$$a_n \leq b_n, \text{ con } \sum_{n=0}^{+\infty} b_n < +\infty. \text{ Allora } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty \quad \square$$

Def.

Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ di funzioni converge
uniformemente assolutamente $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n|$

converge uniformemente $\square$

QSS.

$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n|$ converge uniformemente

$\Downarrow$
 $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente $\square$

Dim.

Usa il criterio nec. e suff. di Cauchy.

$$\sup_{x \in S} |S_m(x) - S_k(x)| = \sup_{x \in S} \left| \sum_{n=0}^m f_n(x) - \sum_{n=0}^k f_n(x) \right|$$

$$\sup_{x \in S} \left| \sum_{n=1+\min(k,m)}^{\max(k,m)} f_n(x) \right|$$

$$S_4 = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4$$

$$S_4 - S_2 = f_3 + f_4$$

$$S_2 = f_0 + f_1 + f_2$$

$$\sup_{x \in S} \sum_{n=1}^{\max(k,m)} |f_n(x)|$$

Quindi Se $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|$ è di Cauchy, per $\|\cdot\|_\infty$,
 lo sarà pure $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. $\square$

Teorema (criterio del confronto "debole")

$g_n, f_n : S \rightarrow \mathbb{R}$. Sia definitivamente

$$0 \leq g_n(x) \leq f_n(x) \text{ per ogni } x \in S$$

Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ convergente uniformemente.

Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ è uniformemente convergente.

Criterio del confronto "forte"

Sia $f_n : S \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ serie a

termini non negativi e convergente.

Sia poi definitivamente $0 \leq f_n(x) \leq g_n, \forall x \in S$

Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ è uniformemente convergente

Def.

Quando $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ verifica le condizioni
del Criterio del Confronto Forte, allora
si dice che essa converge uniformemente totale $\square$

DSS

$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n|$ converge totalmente $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge
uniformemente assoluta

Teo.

Siano $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, sia

$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente a $f \in C^0([a, b])$.

Allora

1) $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n(t) dt$ converge uniformemente
a $\int_a^x f(t) dt$

2) Se $f_n \in C^1([a, b])$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n' \xrightarrow{\text{unif}} g$ e

$\exists \bar{x} \in [a, b]$ t.c. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(\bar{x}) \rightarrow \bar{y} \in \mathbb{R}$,

allora $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \xrightarrow{\text{unif}} \bar{y} + \int_{\bar{x}}^x g(t) dt$ e quindi

$f \in C^1([a, b])$ e $f' = g$ $\square$

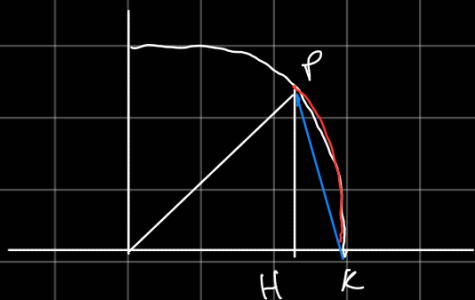
Esercizio Daudon

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2}{n^2} =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^2\left(\frac{x}{n}\right) \quad x \in [-R, R] \quad R > 0.$$

$$\left| \frac{\sin t}{t} \right| \leq 1$$

$$\sin^2 t \leq t^2$$



$$= x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad 0 \leq \sin^2\left(\frac{x}{n}\right) \leq \frac{x^2}{n^2}$$

$$0 \leq \sin^2\left(\frac{x}{n}\right) \leq \frac{x^2}{n^2}$$

$$0 \leq \frac{x^2}{n^2} \leq \frac{R^2}{n^2}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{R^2}{n^2} \rightarrow a_n$$

Converge a 0

Test del confronto