

# Serie di potenze.

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Successione di numeri reali.

Def.

Sia data  $(a_n)$  una succ. di n. reali.

Sia  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Si dice serie di potenze di coeff.

$a_0, a_1, \dots$  e di centro  $x_0$  la seguente

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$(b_n)$  Ripetiamo Anal 1

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \sup_{k \geq n} b_k \right]$$

esistono  
sempre!

$b_0$   $b_1$   $b_2$   $\dots$

Fisso  $k$ , prendo gli  
elementi dopo  $k$ .

es.  $k = 0$ , prendo  $b_1, b_2$  ecc.  
al massimo la serie sarà  $\leq$

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} b_n := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \inf_{k \geq n} b_k \right]$$

sempre ben  
definiti.

## Criterio della radice

Sia  $(b_n)$  successione numerica.

Sia  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|b_n|} < 1$  allora  $(a_n)$  converge  $\square$

OSS.

$$x \neq x_0 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{|a_n|}_{b_n} |x - x_0|^n$$

fisso  $x$

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \sqrt[n]{|a_n| \cdot |x - x_0|^n} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x - x_0|$$

$$(\cdot) \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n| \cdot |x - x_0|^n} < 1 \iff$$

$$\iff |x - x_0| < \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\text{se } \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 0$$

se  $= 0$ , è verificata  
per tutti gli  $x$

$$2) |x - x_0| < +\infty \quad \text{se } \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0^+$$

$$3) (\cdot) \text{ non è mai verificata}$$

Def.

Definisco raggio di convergenza  $R$  di

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ così}$$

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} & \text{quando il denominatore è } \neq 0 \\ +\infty & \text{se } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0^+ \\ 0 & \text{se } \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \end{cases}$$

del criterio

② Se  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ , allora la serie non è convergente.

Oss.

① Se esiste  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  allora il posto del  $\limsup$ , posso usare il limite.

② Se esiste  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$  allora esiste anche  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$  e

criterio del rapporto più forte.

# Teorema di Cauchy-Hadamard.

Sia data  $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$  serie di potenze.

Sia  $R$  il suo raggio di convergenza. Allora

## Convergenza puntuale

i) Se  $0 < R < +\infty$ , allora la serie converge puntualmente  $\forall |x-x_0| < R$ . Se invece  $|x-x_0| > R$  la serie non converge.

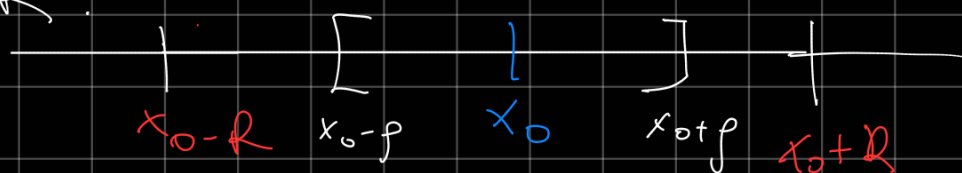
ii) Se  $R = 0^+$  la serie converge solo in  $x_0$ .

iii) Se  $R = +\infty$ , allora la serie converge puntualmente assolutamente su tutto  $\mathbb{R}$ .

## Convergenza uniforme

i) Se  $0 < R < +\infty$ , la serie converge assolutamente uniformemente in  $|x-x_0| \leq \rho$ ,

$\forall 0 < \rho < R$ .



iii<sub>1</sub>) Se  $R = +\infty$  la serie converge assolutamente uniformemente in ogni insieme  $[-A, A]$  con  $A > 0$ , (implica che in ogni insieme limitato di  $\mathbb{R}$ , ha convergenza assoluta).

Dimostriamo i<sub>1</sub>)

Abbiamo che  $0 < R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} < +\infty$

consideriamo

$$|a_0| + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| \cdot |x - x_0|^n$$

$$|a_n| \cdot |x - x_0|^n \leq |a_n| \cdot \rho^n$$

lo maggioro con  $\rho$   
ho trovato una serie numerica non negativa che maggiora la serie di partenza.

Dimostriamo, applicando il criterio della radice, che  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \cdot \rho^n$  converge. Valutiamo:

$$\sqrt[n]{|a_n| \cdot \rho^n} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \rho$$

Passiamo al limsup.

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n| \cdot \rho^n} = \rho \cdot \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho \cdot \frac{1}{R} =$$

$\frac{P}{Q} < 1$ . La mia serie "Cantor" converge.

Esempio Landau.

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 2 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{a_n}$$

tutti termini tutti positivi!

$$Q = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

↪ anche la serie di potenze a 1

$$1 + 2 + 1 + \dots$$

$$S_k(1) = \sum_{n=0}^k a_n \geq \sum_{n=0}^k 1 = k+1 \rightarrow +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$$

$$S_0 = 1$$

$$S_1 = 1 - 2 + 1 - 2$$

$$S_2 = 1 - 2 + 1$$

Viene violato il criterio necessario di Cauchy. non c'è convergenza

$$S_2 = 1 - 2 + 1$$

