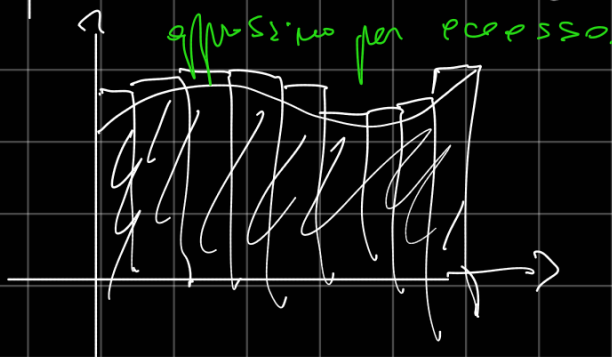
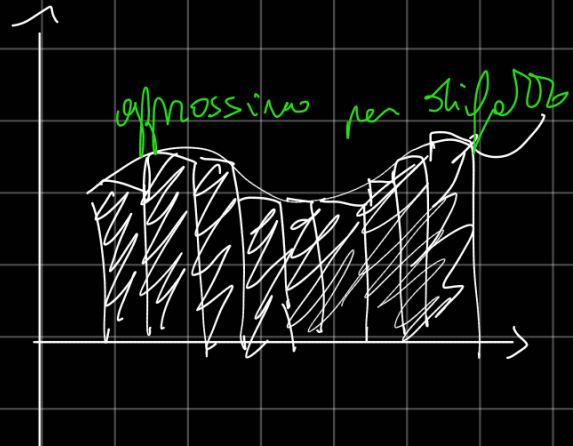
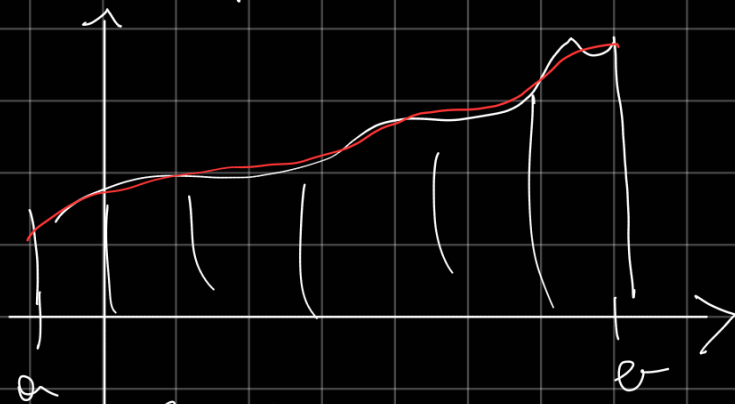


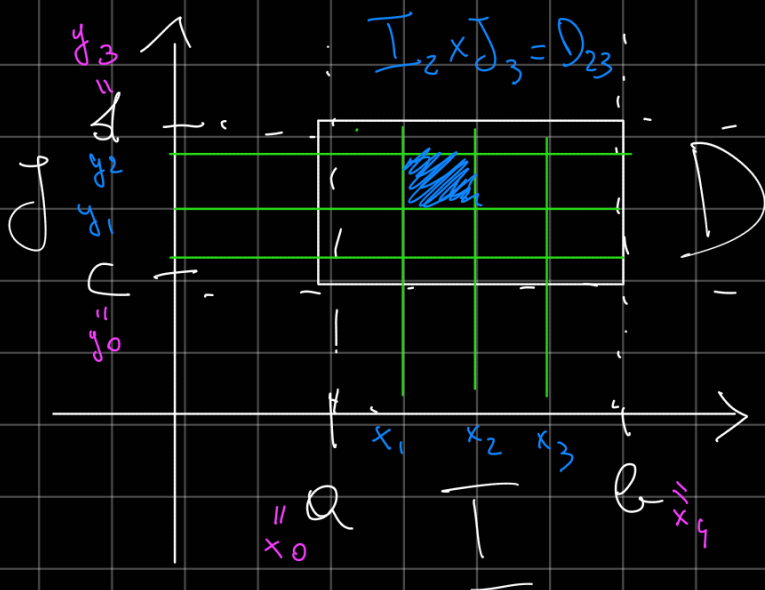
Recap. Integrali.



NOZIONE DI INTEGRALE DI RIEMANN

2-dimensionale

$$I = [a, b], \quad J = [c, d], \quad D = I \times J$$



SUDDIVISIONE INTERVALLO a b

$$\{x_h\}_{h=0, \dots, N}$$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$

$$\{y_k\}_{k=0, \dots, M} \quad c = y_0 < \dots < y_M = d$$

$$I_h = [x_{h-1}, x_h], \quad J_k = [y_{k-1}, y_k]$$

$$D_{hk} := I_h \times J_k$$

$$\{D_{hk}\}_{\substack{1 \leq h \leq N \\ 1 \leq k \leq M}} \leftarrow \text{Partizione di } D$$

Def.

$$\frac{D}{||}$$

$$\text{Sia } [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta] \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\text{mis}(D) := (\gamma - \delta) \cdot (\beta - \alpha) \quad \square$$

misura

"
differenza tra estremo superiore e inferiore

Def.

Sia $D = [a, b] \times [c, d]$

$f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $P = \{D_{hk}\}$.

Definiamo la somma superiore di f relative alla partizione P come:

doppia sommatoria

$$S''(f, P) := \sum_{\substack{1 \leq h \leq N \\ 1 \leq k \leq M}} \text{mis}(D_{hk}) \cdot \sup_{D_{hk}} f$$

Somma di prodotti, l'estremo superiore può anche essere $+\infty$, se f non è sup. limitata

Somma superiore

Prendo ogni rettangolo, e lo moltiplico per l'estremo sup. della mia funzione, e poi sommo per tutti i rettangolini. Sto cercando di approssimare l'integrale

Analogamente la somma inferiore è così definita

$$S'(f, P) := \sum_{\substack{1 \leq h \leq N \\ 1 \leq k \leq M}} \text{mis}(D_{hk}) \cdot \inf_{D_{hk}} f$$

Somma inferiore

Oss.

Se f non è limitata superiormente, $\forall P$ partizione $S''(f, P) = +\infty$

Analogamente se f non è inferiormente limitata,
 $\forall$ partizione $S'(f, P) = -\infty$

meglio metterci nelle funzioni limitate...

OSS.

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, P_1, P_2 partizioni di D , allora
 $S''(f, P_2) \geq S'(f, P_1)$ *qualsiasi somma superiore
è sempre maggiore
di qualsiasi somma inferiore*

Def.

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Diremo che f è integrabile
secondo Riemann (Riemann-integrabile)
se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P_\varepsilon$ di D tale che

$$0 \leq S''(f, P_\varepsilon) - S'(f, P_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

$$\mathcal{R}(D) := \{ f: D \rightarrow \mathbb{R} \text{ è Riemann-integrabile} \}$$

OSS.

$f \in \mathcal{R}(D) \Rightarrow f$ è limitata.

Def.

Due sottoinsiemi non vuoti di $\mathcal{R}$ si

dicamo classi contigue se:

$$i) x \in D_1, y \in D_2 \Rightarrow x \leq y;$$

$$ii) \forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in D_1, y_\varepsilon \in D_2 \text{ t.c.}$$

$$y_\varepsilon - x_\varepsilon \leq \varepsilon \quad \square$$

Assioma di Continuità

Per l'assioma di continuità di $\mathbb{Q}$,
date D_1, D_2 classi contigue

$$\exists \bar{x} \in \mathbb{Q} \text{ t.c.}$$

$$\forall x \in D_1, \forall y \in D_2 \text{ è } x \leq \bar{x} \leq y \quad \square$$

Tale $\bar{x}$ si chiama **Elemento Separatore**

di D_1 e D_2 $\square$

Prop.

tutte possibili
sottoinsiemi

$$h \in \mathcal{R}(D) \Leftrightarrow S(h) := \{ S'(h, P) : P \text{ è partizione di } D \}$$

P è partizione di D } e

tutte possibili sottoinsiemi

$$S''(h) := \{ S''(h, P) : P \text{ è partizione} \}$$

$\mathcal{L}(D)$ sono classi contigue.

Def.

Se $f \in \mathcal{R}(D)$ allora l'elemento separatore di $S'(f)$ e $S''(f)$ si chiama integrale doppio di Riemann della f e lo si denota con:

$$\underbrace{\iint_D f(x,y) dx dy}_{\text{oppure}} \underbrace{\iint_D f}$$

OSS.

Se $f \in \mathcal{R}(D)$ allora

$$\iint_D f = \sup S'(f) = \inf S''(f) \quad \square$$

Prop.

Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $g, h \in \mathcal{R}(D)$

Axiome

$$1) (a h + b g) \in \mathcal{R}(D)$$

$$\int_D (a h + b g) = a \int_D h + b \int_D g;$$

$$2) (h \cdot g) \in \mathcal{R}(D);$$

$$3) \max(h, g), \min(h, g), |h| \in \mathcal{R}(D);$$

$$4) \left| \int_D h \right| \leq \int_D |h|$$

$$5) h \in C^0(D) \Rightarrow h \in \mathcal{R}(D) \quad \square$$