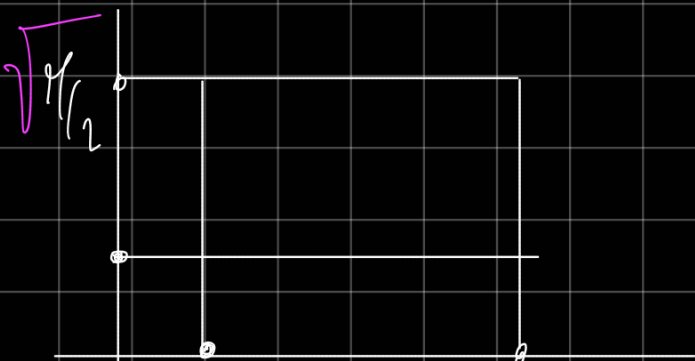


$$\iint_{[0, \pi/2] \times [0, \pi/2]} xy \sin(y^2) dx dy$$

$$D = [0, \pi/2] \times [0, \sqrt{\pi/2}]$$

per far tornare i conti meglio

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = xy \sin(y^2)$$



fixo x
integro per y
se facessi il contrario,
e' uguale.

$$\int_0^{\pi/2} dx \left[\int_0^{\sqrt{\pi/2}} xy \sin(y^2) dy \right]$$

con parametro fisso, come costante

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} x dx \left[\int_0^{\sqrt{\pi/2}} y \sin(y^2) dy \right] = \int_0^{\pi/2} x \left(\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{\pi/2}} 2y \sin(y^2) dy \right) dx = \\ & = \int_0^{\pi/2} \frac{x}{2} \cdot [-\cos(y^2)]_0^{\sqrt{\pi/2}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{x}{2} (1) dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

Prop.

è riemann-integrabile

$$\text{Siano } \phi: I \rightarrow \mathbb{R}, \psi: J \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\phi \cdot \psi \in \mathcal{R}(I \times J), \quad \phi \in \mathcal{R}[I],$$

$$\psi \in \mathcal{R}(J) \quad \text{Allora}$$

$$\int_{I \times J} \phi \cdot \psi = \left(\int_I \phi \right) \cdot \left(\int_J \psi \right) \quad \square$$

$$I = [a, b], \quad J = [c, d], \quad K = [e, f]$$

suddivis. di J

$$\{x_m\}, \{y_k\}, \{z_e\}$$

suddiv. di K

suddivisione di I

$$\{P_{hke}\} \leftarrow \text{Partizione di } P = I \times J \times K$$

Parallelepipedo

$$P_{hke} = [x_{h-1}, x_h] \times [y_{k-1}, y_k] \times [z_{e-1}, z_e]$$

$$P = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta) \times (\varepsilon, \zeta)$$

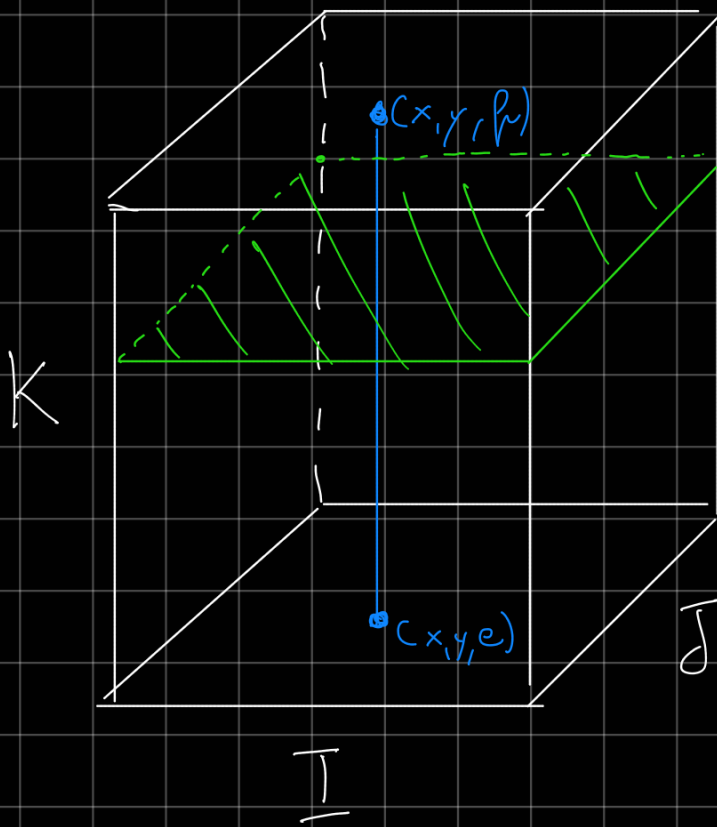
$$\text{mis}(P) = (\beta - \alpha) \times (\delta - \gamma) \times (\zeta - \varepsilon)$$

$$\text{mis}(P_{hke}) = (x_h - x_{h-1}) \cdot (y_k - y_{k-1}) \cdot (z_e - z_{e-1})$$

$$S''(f, P) := \sum_{h,k,e} \left(\sup_{P_{hke}} f \right) \cdot \text{mis}(P_{hke})$$

$$S'(f, P) := \dots$$

Come vale ciò per il caso bidimensionale, così vale per tridimensionale, e anche n -dimensionale



già il disegno, c'ho messo 3 ore per farlo

"Slicing", sotto 2 variabili

"Spaghettificazione", 1^a variabile

Teorema di Folini-Tonelli 3-dim

(1) caso della "spaghettificazione"

Sia $p: P \rightarrow \mathbb{R}$ in $\mathcal{R}(P)$.

Sia $\forall (x, y) \in I \times J$, $p(x, y, \cdot): K \rightarrow \mathbb{R}$ ^{funzione variabile z}
^{riemann-integrabile secondo la 3^a variabile}
 in $\mathcal{R}(K)$.

Allora $(x, y)^T \mapsto \int p(x, y, z) dz$ è in
 $\mathcal{R}(I \times J)^K$ e

spaghettificata...

$$\iiint_P f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{I \times J} \left(\int_K f(x, y, z) dz \right) dx dy.$$

(2) Sia $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ in $\mathcal{Q}(P)$. ora SLICUB!!
 $\forall z \in K$, $f(\cdot, \cdot, z)$ in $\mathcal{Q}(I \times J)$. $\forall$ voglio che ogni fetta sia integrabile

Allora $z \mapsto \iint f(x, y, z) dx dy$ è in $\mathcal{Q}(K)$ e

$$\iiint_P f(x, y, z) dx dy dz = \int_K \left[\iint f(x, y, z) dx dy \right] dz \quad \square$$

Notione di insieme misurabile

secondo Peano-Jordan

Def.

Un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice misurabile

secondo Peano-Jordan se esiste un

rettangolo (chiuso) D con $S \subseteq D$ tale

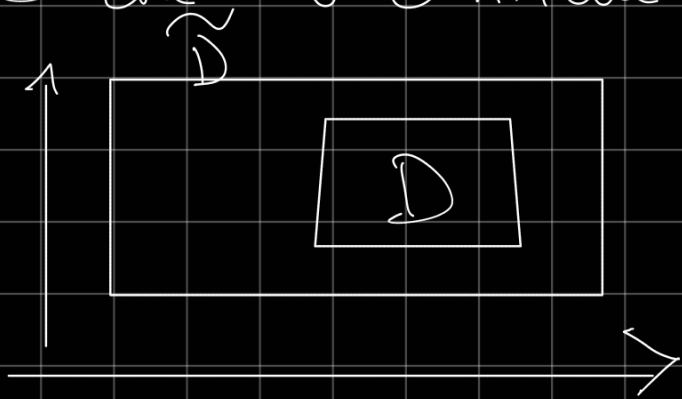
che $\chi_S|_D \in \mathcal{Q}(D)$ funzione caratteristica
rispetto a D □

QSS

Se $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ è in $\mathcal{R}(D)$ e se $\tilde{D} \supseteq D$, allora la funzione $\tilde{f}: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$ $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in D \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$ è in $\mathcal{R}(\tilde{D})$. $\square$

Corollario

La definizione di insieme P - J misurabile è indipendente del rettangolo D che lo contiene



Se $\tilde{D} \supseteq D$ e $f: \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$ è tale che $f|_{\tilde{D} \setminus D} \equiv 0$, allora $f \in \mathcal{R}(\tilde{D}) \Rightarrow f|_D \in \mathcal{R}(D)$. $\square$

$\hookrightarrow$ *misurabile* $\vee$ indipendente del rettangolo che lo contiene
FOLSC

OSS.

Un rettangolo $D = I \times J$ è misurabile
secondo P-J. Inoltre

$$\int_D \chi_D = \text{mis}(D) = (b-a) \cdot (d-c)$$

$\Rightarrow$

Def.

Un plurirettangolo in $\mathbb{R}^2$ è l'unione
finita di rettangoli in $\mathbb{R}^2$

OSS.

Ogni plurirettangolo è P-J misurabile. $\square$

Def.

Sia $S \subseteq D$ un insieme P-J misurabile.

Definiamo $m_2(S) := \int_D \chi_S$

quello che da misura non è il rettangolo
che contiene S , ma S

Prop.

$S \subseteq \mathbb{R}^2$ è $\mathcal{P}$ - $\mathcal{J}$ misurabile

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P''_\varepsilon, P'_\varepsilon$ pluriangolari

t.c. $P''_\varepsilon \supseteq S \supseteq P'_\varepsilon$ e

$$0 \leq m_2(P''_\varepsilon) - m_2(P'_\varepsilon) \leq \varepsilon \quad \square$$

Prop. (Proprietà insiemistica misurabili secondo $\mathcal{P}$ - $\mathcal{J}$)

1) Unione e intersezione finita di insiemistica $\mathcal{P}$ - $\mathcal{J}$ misurabili, è ancora misurabile secondo $\mathcal{P}$ - $\mathcal{J}$.

La cosa non vale per unioni numerabili.

Controesempio

$$\text{Sia } C = \mathbb{Q}^2 \cap [0,1] \times [0,1]$$

$\downarrow$ elementi di base contengono le coord. razionali
 $\mathbb{Q}$ è numerabile

Sia $m \mapsto C$ una funzione rigettiva

$$\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$$

Sia $\rho > 0$, definiamo

$$\Omega_\rho = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B(\varphi(n), \rho^n), \quad \text{allora}$$

se ρ è sufficientemente piccolo,

Ω_ρ non è P -T misurabile.

ad ogni n associa un disco $D_n \subset \mathbb{C}$,
che ruota come centro della palla
di raggio ρ^n .

Se $\rho > 1$, trovo un sottinsieme,
ma non è tutto l'insieme.