

Def.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^m$ non vuoto. Si dice sua funzione caratteristica la χ_A .

$$\chi_A: \mathbb{R}^m \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases} \quad \square$$

Def.

Sia $D = I \times J$ un rettangolo di $\mathbb{R}^2$. Una funzione $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ si dice appartenere a S_{rett} se:

esiste una partizione $P: \{D_{hk}\}$ di D ed esistono costanti reali λ_{hk} t.c.

$$f = \sum_{h,k} \lambda_{hk} \cdot \chi_{D_{hk}} \quad \square$$

Prop.

(caratterizzazione delle Riemann-integrabili
intermini di funzioni di S_{rett} .)

$$f \in \mathcal{R}(D)$$



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon'', \delta_\varepsilon' \in S_{\text{rett}}(D) \text{ t.c.}$$

$$\delta_\varepsilon' \leq f \leq \delta_\varepsilon'' \quad \text{e} \quad \iint_D \delta_\varepsilon'' - \iint_D \delta_\varepsilon' \leq \varepsilon \quad \square$$

OSS

$$f \in S_{\text{rett}}(D) \Rightarrow f \in \mathcal{R}(D)$$

$$\iint_D f = \sum_{h,k} 1_{h,k} \text{mis}(D_{h,k})$$

integrale funzione
caratteristica di
 $D_{h,k}$

OSS

Se $\tilde{D} \subseteq D$ è un rettangolo $\tilde{I} \times \tilde{J}$ di D ,
 $\tilde{I} \subseteq I$, $\tilde{J} \subseteq J$, allora $\chi_{\tilde{D}} \in \mathcal{R}(D)$ e
 $\iint_D \chi_{\tilde{D}} = \text{mis}(\tilde{D})$

Prop.

Sia $D = I \times J$ rettangolo di $\mathbb{R}^2$. Sia

$\mathcal{P} = \{D_{h,k}\}$ una sua partizione

$$e \mathcal{D}_A = \bigcup_{h,k} \mathcal{D}_{h,k}$$

uniamo solo le parti interne.

Sia poi $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ limitato,

$$g = \sum_{h,k} \lambda_{h,k} \chi_{\mathcal{D}_{h,k}} \text{ e sia } f|_{\mathcal{D}_A} = g|_{\mathcal{D}_A}$$

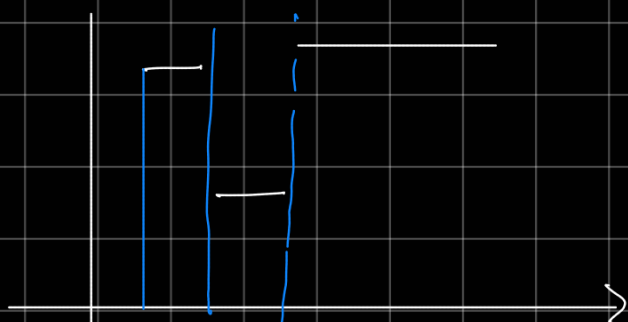
f nelle p.z. interne $e' = g$ più vicino solo nella p.z. interna.

Allora $f \in \mathcal{R}(\mathcal{D})$ e

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} f &= \iint_{\mathcal{D}} g = \sum_{h,k} \lambda_{h,k} \text{mis}(\mathcal{D}_{h,k}) = \\ &= \sum_{h,k} \lambda_{h,k} \cdot (x_{h+1} - x_h) \cdot (y_{k+1} - y_k) = \end{aligned}$$

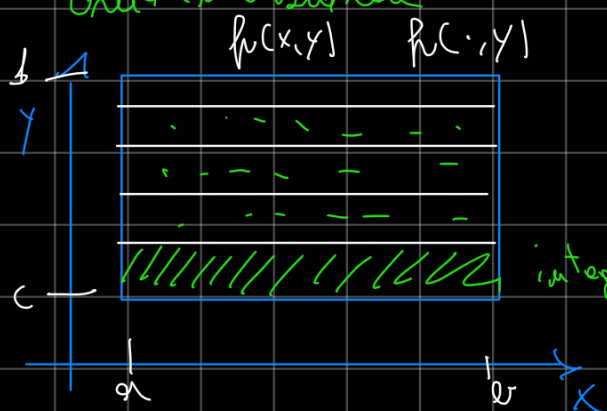
continuazione discreta di Stieltjes

$$= \sum_{h,k} \lambda_{h,k} \cdot \int_{I_h} \chi_{I_k} \cdot \int_{J_k} \chi_{J_k} \quad \square$$



quale al Teo. nel caso unidimensionale

funzione a scalari
sempre integrabile,
non abbiamo preoccupazioni
nei punti di salto,
di discontinuità,
gli integrali sono uguali.



integrale unidimensionale tra a e b

otengo infine una funzione dipendente da y . Posso farlo

in continuo.

Teorema di Fubini - Tonelli:

Sia $R: D \rightarrow \mathbb{R}$, $R \in \mathcal{R}(D)$. Sia $\forall x \in I$,

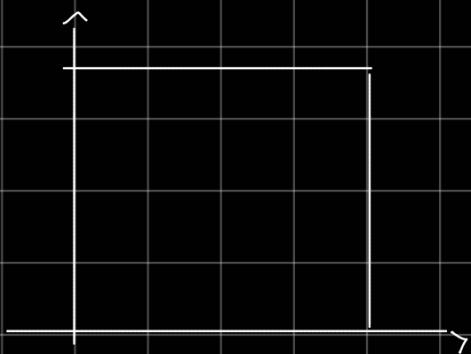
$R(x, \cdot): J \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrabile (in una

dimensione). Allora

integrabile in x

i) $x \mapsto \int_J R(x, y) dy$ è in $\mathcal{R}(I)$;

ii) $\int_I \left(\int_J R(x, y) dy \right) dx = \iint_D R(x, y) dx dy$



Lemma

F-B vale per $R(x, y) =$

$$\sum_{h,k} \lambda_{h,k} \chi_{D_{h,k}} = \sum_{h,k} \lambda_{h,k} \chi_{I_h} \cdot \chi_{J_k}$$

Osserviamo che per $(x, y)^T \in D_n$, vale

$$\text{che } R(x, y) = \sum_{h,k} \lambda_{h,k} \cdot \chi_{I_h} \cdot \chi_{J_k}.$$

Quindi $p|_{D_A} = \sum_{h,k} \lambda_{hk} \cdot \chi_{I_h} \cdot \chi_{J_k}$

$$\tilde{p} = \begin{cases} \sum_{h,k} \lambda_{hk} \cdot \chi_{I_h} \cdot \chi_{J_k} & \text{in } D_A \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Quindi so che $\tilde{p} \in \mathcal{R}(D)$ e

$$\iint_D \tilde{p} = \iint_D p.$$

$$\iint_D p = \iint_D \tilde{p} = \sum_{h,k} \lambda_{hk} \operatorname{mis}(D_{hk}) =$$

$$= \sum_{h,k} \lambda_{hk} \operatorname{mis}(I_h) \operatorname{mis}(J_k) =$$

$$= \sum_h \left[\sum_k \lambda_{hk} \operatorname{mis}(J_k) \right] \cdot \operatorname{mis}(I_h)$$

parte interna

Notiamo che, se $x \in I_h$, allora

$$p(x, \cdot) = \sum_k \lambda_{hk} \chi_{J_k}. \quad \text{Quindi}$$

$$\int_J \tilde{p}(x, y) dy = \int_J p(x, y) dy =$$

$$\int_J \left(\sum_k \lambda_{hk} \cdot \chi_{J_k} \right) = \sum_k \lambda_{hk} \cdot \operatorname{mis}(J_k)$$

$$\int_I \left(\int_J p(x, y) dy \right) dx = \sum_h \int_I \left(\sum_k \lambda_{hk} \operatorname{mis}(J_k) \cdot \chi_{I_h} \right) dx =$$

$\sum_h \chi_{I_h} \left(\int_J \lambda_{hk} \chi_{J_k} dy \right)$ next step

$$= \sum_h \int \sum_k \left(\lambda_{hk} \cdot \overset{\text{meno liscio}}{\text{mis}(J_k)} \cdot \chi_{I_h} \right) dx$$

non dip. da x, fine fuori

$$= \sum_h \left(\sum_k \lambda_{hk} \text{mis}(J_k) \cdot \int_{I_h} \chi_{I_h} \cdot dx \right)$$

$$= \sum_h \sum_k \lambda_{hk} \text{mis}(J_k) \text{mis}(I_h)$$

$$* \sum_h \int_{I_h} \left(\int_J h(x,y) dy \right) dx$$

Dim F-T generale

Sia $h \in \mathcal{R}(D)$ che verifica le ipotesi di F-T

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varphi \leq h \leq \psi, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{S}_{\text{rett}}$$

e tali che:

$$0 \leq \iint_D \psi - \iint_D \varphi \leq \varepsilon$$

$$\varphi(x,y) \leq h(x,y) \leq \psi(x,y)$$

$$\int_J \varphi(x,y) dy \leq \int_J h(x,y) dy \leq \int_J \psi(x,y) dy$$

$$\text{Poi } 0 \leq \int_I \left(\int_J \psi(x,y) dy \right) dx - \int_I \left(\int_J \varphi(x,y) dy \right) dx \leq \varepsilon$$

$$\sum_h \left(\sum_k \lambda_{h_k} \text{mis}(I_k) \right) \chi_{I_k} \in S_{\text{rett}}(I)$$

Def.

Sia $I = [a, b]$. Sia $S_{\text{rett}}(I)$ l'insieme delle $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tali che esiste una

partizione $P = \{I_h\}$ di $[a, b]$ e

$$\lambda_h \in \mathbb{R} \text{ per cui } f = \sum_h \lambda_h \chi_{I_h} \quad \square$$

Prop. Sia $I = [a, b]$.

$$f \in \mathcal{R}(I)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varphi, \psi \in S_{\text{rett}}(I), \quad \varphi \leq f \leq \psi \text{ e t.c.}$$

$$0 \leq \int_I \psi - \int_I \varphi \leq \varepsilon \quad \square$$

Abbiamo che

$$x \mapsto \int_I \varphi(x, y) dy, \quad x \mapsto \int_I \psi(x, y) dy$$

appartengono a $S_{\text{rett}}(I)$

$$\text{Poniamo } x \mapsto \int_I h(x, y) dy.$$

$$\text{Abbiamo trovato } F \leq \phi \leq G$$

maggiori
che differiscono
a meno di ϵ

Applicando la precedente Prop.

abbiamo che $\phi \in R(I)$; quindi è ben

$$\text{definito } \int_I \left(\int_I h(x, y) dy \right) dx$$

Inoltre, si noti che, posto

$$\Sigma''(h) = \left\{ \iint_D \psi(x, y) dx dy \mid \psi \in S_{\text{ref}}(D) \right\}$$

$$\Sigma'(h) = \left\{ \iint_D \psi(x, y) dx dy \mid \psi \in S_{\text{rect}}(D) \right\}$$

$\iint_D h(x, y) dx dy$ è unico elemento

$\Rightarrow$ separazione di Σ'' e Σ' . Inoltre

$$\int_I \left(\int_I h(x, y) dy \right) dx, \text{ sia } \iint_D h(x, y) dx dy$$

sono elementi separatori, quindi

devono COINCIDERE $\square$

