

Prop.

1) Unione e intersezione finita di insiemi

$P$ - $J$  misurabile è  $P$ - $J$  misurabile.

2) Sia  $D$  rettangolo,  $S$   $P$ - $J$  misurabile.

Allora  $D \cap S$  è  $P$ - $J$  mis.

3) Tutti i pluriangoli chiusi o aperti.

Tutte le palle chiuse o aperte sono

$P$ - $J$  misurabili.

4) Siano  $\varphi, \psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi \leq \psi$

$\varphi, \psi \in \mathcal{R}([a, b])$ . Allora l'insieme

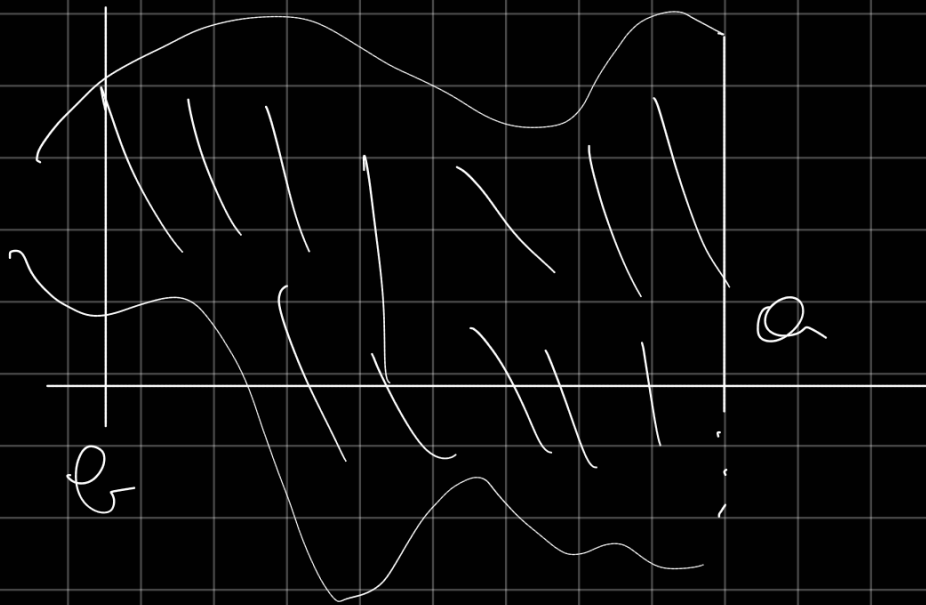
$$D_{\varphi, \psi} = \left\{ (x, y)^T : x \in [a, b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x) \right\}$$

è detto un dominio reale.

Allora ogni dominio normale è  $P$ - $J$  misurabile.

Indicando risulta

$$m_2(D_{\varphi, \psi}) = \int_a^b [\psi(x) - \varphi(x)] dx$$



5) Subadditività finita

$A_1, \dots, A_n$   $P$ - $\mathcal{I}$  mis.

$$m_2(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \sum_{i=1}^n m_2(A_i)$$

Inoltre, se  $\forall l, m \in \{1, \dots, n\}$ ,  $l \neq m$

$m_2(A_l \cap A_m) = 0$  vale l'uguaglianza  $\square$

Def.

Sia  $D$  un rettangolo,  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  Tale che

$f|_D \in \mathcal{R}(D)$ .

Sia  $S \subseteq D$   $P$ - $\mathcal{I}$  misurabile.

Definisco

$$\int_S h := \int_D h|_D \cdot \pi_S$$

non integrabile

restringo  
la funzione  
h al solo D.  
e lo moltiplico  
per la f. caratteristica

OSS.

Si noti che, se ben definito,  $\int_S h$  è  
indipendente dal rettangolo  $D \ni S$   $\square$

$\mathcal{Q}(S)$

Teorema della media integrale.

$\mathcal{Q}$ -integrabile su S

Sia S  $\mathcal{P}$ - $\delta$  misurabile,  $f \in \mathcal{Q}(S)$ .

Allora, sotto  $\lambda = \inf_S f$ ,  $\Lambda = \sup_S f$ ,

esiste  $\mu \in [\lambda, \Lambda]$  t.c.

$$\int_S f = \mu \cdot m_2(S)$$

Dim

Se  $m_2(S) = 0$ , è ovvio.

Se  $m_2(S) > 0$  allora considero

$$\frac{1}{m_2(S)} \iint_S \lambda \leq \frac{1}{m_2(S)} \iint_S f \leq \frac{1}{m_2(S)} \iint_S \Lambda$$

$$\frac{1}{m_2(S)} \lambda_{m_2(S)} \leq \frac{1}{m_2(S)} \iint_S f \leq \frac{1}{m_2(S)} \Lambda_{m_2(S)}$$

Ponendo  $\mu = \frac{1}{m_2(S)} \iint_S f$ , ho

$$\lambda \leq \mu \leq \Lambda \quad \text{e} \quad \iint_S f = \mu \cdot m_2(S)$$

OS

Siano  $S_1, S_2$  p- $\mathcal{I}$  mis.

$$m_2(S_2) = 0, \quad f \in \mathcal{Q}(S_1)$$

Allora  $f \in \mathcal{Q}(S_1 \cup S_2)$  e

$$\iint_{S_1 \cup S_2} f = \iint_{S_2} f \quad \square$$

posso vedere  
 mia funzione definita  
 su p- $\mathcal{I}$   $S_1$  integrabile.  
 la modifico a mio  
 piacimento con ... nulla.  
 ottengo una  $f$  integrabile,  
 misurabile e non  
 cambia l'integrale.

## Caso 1-dim Teorema della sostituzione

i)  $\phi: [a, b] \rightarrow [A, B]$ , diffeomorfismo di classe  $C^1$ , per cui

$\phi$  è di classe  $C^1$ ,  $\phi^{-1}$  è di classe  $C^1$

Sia  $f \in \mathcal{R}([a, b])$ , allora

$$\int_a^b f(\phi(t)) \cdot \phi'(t) dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) dx$$

Quindi anche

$$\int_a^b f(\phi(t)) \cdot |\phi'(t)| dt = \int_A^B f(x) dx$$

$$ii) \int_a^b f(\phi(t)) dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x) \cdot \frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(x))} dx$$

$$\left( \phi^{-1} \right)'(x)$$

Quindi anche

$$\int_a^b f(\phi(t)) dt = \int_A^B f(x) \frac{1}{|\phi'(\phi^{-1}(x))|} dx$$

Versione unidimens. del cambio di variabile

Teo. (Cambio di variabile  
per l'integrale di Riemann  
 $n$ -dim).

Siano  $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$  aperti e  
misurabili secondo P-J. Sia  $\phi: W \rightarrow V$   
un diffeomorfismo di classe  $C^1$ .

Esista poi  $M \geq 0$  f.c.

$$|\det(D\phi_x)| \leq M, \forall x \in W.$$

Sia  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in \mathcal{Q}(V)$ .

Allora

i)  $f \circ \phi: W \rightarrow \mathbb{R}$  è in  $\mathcal{Q}(W)$

ii)  $\int_W f \circ \phi(\vec{t}) \cdot |\det(D\phi_{\vec{t}})| d\vec{t} =$

$$= \int_V h(\vec{x}) d\vec{x}, \quad \text{sove } \vec{E} \in W, \vec{x} \in V, \\ \text{e } \vec{x} = \phi(\vec{t});$$

iii) Se inoltre vale che

$$\frac{1}{|\det(D\phi)|} \leq M, \forall x \in W, \text{ allora}$$

$$\int_W h(\phi(t)) d\vec{t} = \int_V h(\vec{x}) \frac{1}{|\det(D\phi(\phi^{-1}(x)))|} d\vec{x}$$

□

$$(0, +\infty) \times [0, 2\pi) \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)^T\}$$

$$(p, \vartheta)^T \xrightarrow{\phi} (p \cos \vartheta, p \sin \vartheta)^T$$

$$D\phi_{(p, \vartheta)} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -p \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & p \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\det(D\phi_{(p, \vartheta)}) = p \cos^2 \vartheta + p \sin^2 \vartheta = \\ = p(\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) = p.$$

$W$  sarà l'insieme delle  
rappresentazioni in coord. polari.

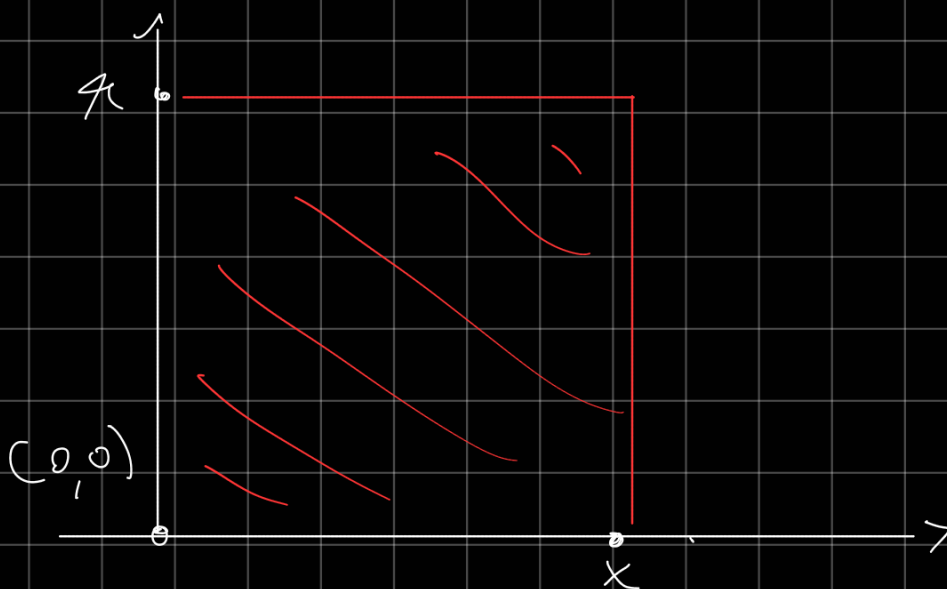
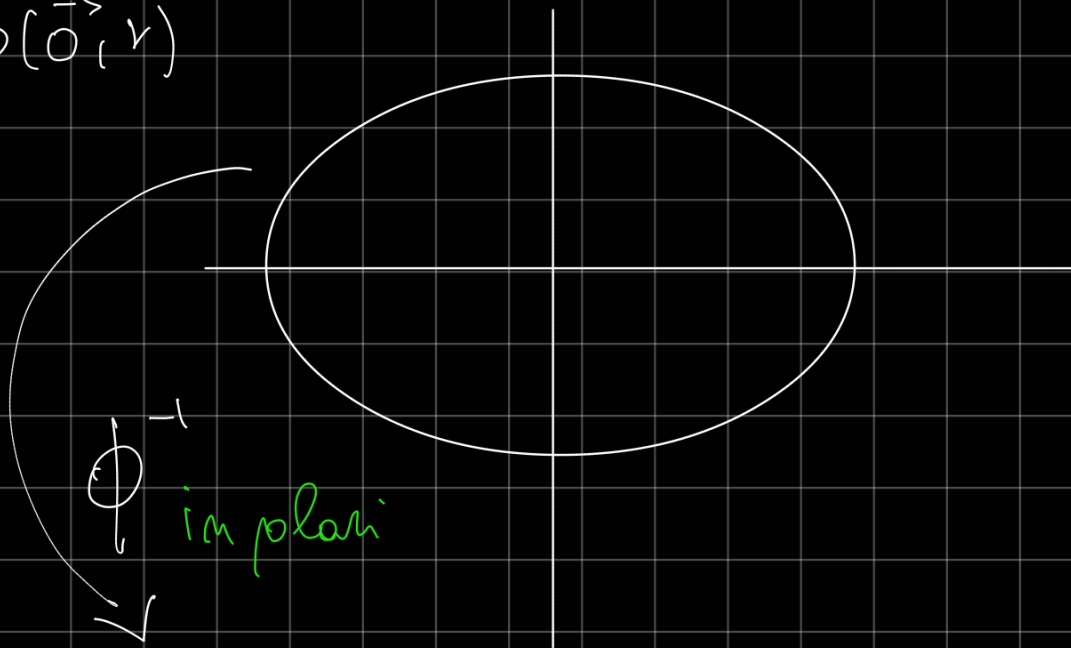
Fattore di magnificazione  $J$

$$\iint h(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \cdot f \, d\rho \, d\vartheta$$

più complicato scegliere dominio in coord polari

$$\iint_{B(\vec{0}, r)} h(x, y) \, dx \, dy \Rightarrow$$

UNA PALLA IN COORD POLARI  
DIVENTA UN RETTANGOLO.



$$B(\vec{0}, r) \rightarrow (0, r) \times [0, 2\pi)$$

$$\iint_{B(\vec{0}, r)} f(x, y) dx dy = \iint_{(0, r) \times [0, 2\pi)} f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) \cdot \rho d\rho d\vartheta$$

$$f_\alpha(x, y) = \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right)^\alpha, \quad \alpha > 0$$

$$\iint_{B(\vec{0}, r)} f_\alpha(x, y) dx dy = \int_{(0, r) \times [0, 2\pi)} \rho^\alpha \cdot \rho d\rho d\vartheta =$$

$$\int_0^{2\pi} \left[ \int_0^r \rho^{\alpha+1} d\rho \right] d\vartheta = 2\pi \cdot \frac{r^{\alpha+2}}{\alpha+2}$$