

Eq differenziali (ordinarie),
è una equazione
con una certa regolarità e un certo
numero di derivate

Def.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 1$ insieme aperto non
vuoto. Sia poi $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione
data. Una funzione $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ con
 I intervallo generalizzato si dice

soluzione puntuale dell'equazione
differenziale,

① $f(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$

se

- i) y è derivabile n -volte in ogni $t \in I$;
- ii) $\forall t \in I, f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0$

Se inoltre $y \in C^n(I)$ allora contiene tutte
le derivate fino all'
ordine n -esimo

allora f si chiama soluzione forte, o semplicemente soluzione di $\textcircled{1}$.

Def. $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g: A \rightarrow \mathbb{R}$

Sia $h(t, z_0, \dots, z_m) = z_m \cdot g(t, z_0, \dots, z_{m-1})$,

allora $\textcircled{1}$ assume la forma

$$m^{(m)}(t) = g(t, m^{(1)}(t), m^{(2)}(t), \dots, m^{(m-1)}(t))$$

per la g al secondo membro.

In quel caso si parla di equazione differenziale ordinaria in forma normale

es. per $m \cdot \ddot{x} = f(t, \vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t))$ f che dipende
dal tempo
posizione e velocità

Def. (caso vettoriale)

Sia $\Omega \subseteq \textcircled{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{K(m+1)}$ $K > 1$
variabile
dipendente.

$K > 1$, ci sono K funzioni
 coordinate, ciascuna con
 le sue m -esime diff.
 possiamo parlare di sistema di equaz.
 differenziali.

aperto non vuoto. $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$

Una funzione $\vec{y}: I \rightarrow \mathbb{R}^k$ dove I è
un intervallo generalizzato, si dice soluzione
particolare per

$n+1$ der. di
 k dimensioni

1) $F(t, \vec{y}(t), \vec{y}'(t), \dots, \vec{y}^{(n)}(t)) = \vec{0}$

Se inoltre $\vec{y} \in C^n(I, \mathbb{R}^k)$ allora y è
soluzione forte, o soluzione 1) $\vec{y}$

Def $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad g: A \rightarrow \mathbb{R}^k$

Sia $h(t, \vec{z}_0, \dots, \vec{z}_m) = \vec{z}_m - g(t, \vec{z}_0, \dots, \vec{z}_{m-1})$

allora (1) assume la forma,

$$\vec{y}^{(n)}(t) = g(t, \vec{y}(t), \vec{y}'(t), \dots, \vec{y}^{(n-1)}(t))$$

$$F = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{pmatrix} \quad h_j: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{matrix} 1 \\ \text{Sist.} \\ \text{eq.} \end{matrix} \left\{ \begin{aligned} &h_1(t, (v_1^{(1)}, \dots, v_1^{(n)})^T, \dots, (v_k^{(1)}, \dots, v_k^{(n)})^T) = 0 \\ &\vdots \\ &h_k(t, (v_1^{(1)}, \dots, v_1^{(n)})^T, \dots, (v_k^{(1)}, \dots, v_k^{(n)})^T) = 0 \end{aligned} \right.$$

c'è una periferia delle componenti, 1° blocco ha 1° componente funzione n-esima derivata, 2° blocco, 2° componente con derivata n-esima

meglio descrivere usando l'ordine
 $\rightarrow v^{(n)}(t) = \dots$

$$\begin{matrix} 1 \\ \text{Sistema} \end{matrix} \left\{ \begin{aligned} &h_1(t, (v_1, \dots, v_k)^T, \dots, (v_1^{(n)}, \dots, v_k^{(n)})^T) = 0 \\ &h_k(t, (v_1, \dots, v_k)^T, \dots, (v_1^{(n)}, \dots, v_k^{(n)})^T) = 0 \end{aligned} \right.$$

perché

$$h(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2$$

$$h(x, y) = x^2 + y,$$

$$h(y, x) = y^2 + x$$

non posso
permutare variabili

$n = 1$ caso scalare, forma normale

$$\textcircled{3} u'(t) = g(t, u(t))$$

$$g: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

insieme quello non vuoto

Def. (problema di Cauchy)

$$\text{Sia } (t_0, u_0)^T \in A$$

Diciamo problema di Cauchy associato all'

equazione $\textcircled{3}$ e con dato iniziale

$$u(t_0) = u_0 \quad \text{il seguente:}$$

$$(Ca) \begin{cases} u'(t) = g(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

> invece di
la f. nel punto t_0 vale
il valore fissato u_0

Def.

$\gamma: \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{I}$ intervallo generalizzato, si

dice soluzione per (Ca) se:

$$i) \forall t \in T \quad (t, y(t))^T \in A;$$

$$ii) \overset{\text{cond. di regolarità}}{y(t_0) = v_0}, \quad \overset{\text{cond. di regolarità}}{y \in C^1(I)} \text{ e}$$

$$\forall t \in I \quad \text{è} \quad y'(t) = g(t, y(t))$$

però per farlo serve risolvere l'eq. diff.

Se non impongo ciò ci saranno infinite

$$v'(t) = 0 \iff v \equiv k, \quad k \in \mathbb{R}$$

Se però impongo che

$$\begin{cases} v'(t) = 0 \\ v(t_0) = v_0 \end{cases}$$

questo costante non può
essere un qualsiasi, imposto
una condizione iniziale

$$v \equiv k, \quad v(t_0) = v_0 \Rightarrow k = v_0 \quad v \equiv v_0$$

$$p \in C(\mathbb{R})$$

$$\begin{cases} v'(t) = p(t) \\ v(t_0) = v_0 \end{cases}$$

ricerca
di una
funzione v

integrando
da t_0 a t

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^t h(s) ds.$$

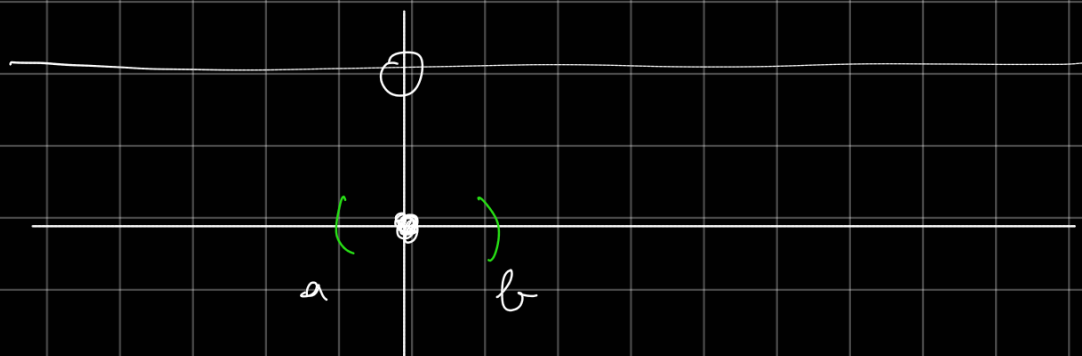
$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t h(s) ds$$

po' indichiamo in
maniera univoca
la mia soluzione

Esempio di non esistenza della soluzione. Si pensa della
regolarità
di g

$$g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(t, z) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq 0 \\ 1 & \text{in } t = 0 \end{cases}$$



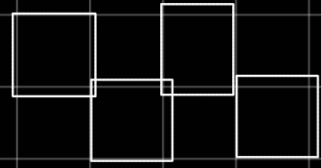
$$\begin{cases} v'(t) = g(t) \\ v_0 = 0 \end{cases}$$

non dipende dalla 2^a variabile.

MA NON ESISTE NEANCHE
UNA SOLUZIONE PUNTUALE

anche g non continua in 0,
non c'è una soluzione forte.
la derivata può se esiste, non
è continua

Sol. particolare = sol. continua, derivabile che
verifica questa relazione



$$v'(t) = 0, \quad \forall t \neq 0$$

$$v(a, b) = K_b$$

$$v(a, 0) = K_a$$

ma v
deve essere
continua in $\mathcal{O}$

$$v \text{ continua in } \mathcal{O} \Rightarrow K_a = K_b = K \quad \text{e chiaro}$$

Sempre per continuità

$$0 = v(0) = \lim_{t \rightarrow 0} v(t) = K$$

$$\text{Allora } v \equiv 0, \quad \text{quindi } v'(0) = 0$$

$$\text{Ma } v'(0) = g(0) = 1$$

! ASSURDO.

NON ESISTE nessun
soluzione puntuale

