

Teorema di esistenza di Peano

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto non vuoto.

Sia $(t_0, x_0)^T \in A$. Sia $g: A \rightarrow \mathbb{R}$

una funzione continua. Poniamo

$$D_{a,b} = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] \subseteq A$$

Poniamo $M_{a,b} = \max_{x \in D_{a,b}} |g(x)|$

essendo
insieme compatto,
il massimo esiste
sempre.

Allora, per ogni $0 < \delta < \min(a, \frac{b}{M_{a,b}})$, esiste
una $y: (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ soluzione per

$$(Ca) \begin{cases} v'(t) = g(t, v(t)) \\ v(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$v(t) = x_0 + \int_{t_0}^t g(\tau, v(\tau)) d\tau$$

Equazione integrale di Volterra

Dill.

$$U_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t g(\tau, U_{n-1}(\tau)) d\tau$$

$$U_0 \equiv x_0$$

in modo iterativo

è una succ. funzionale di Cauchy in $C^0([-t_0, t_0])$ ristretta in questo spazio

Fissato il dominio, quante soluzioni esistono?

la continuità non ci dice nulla sull'unicità delle soluzioni.

Servono continue sulle soluzioni.

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(z) = z^{1/3}$$

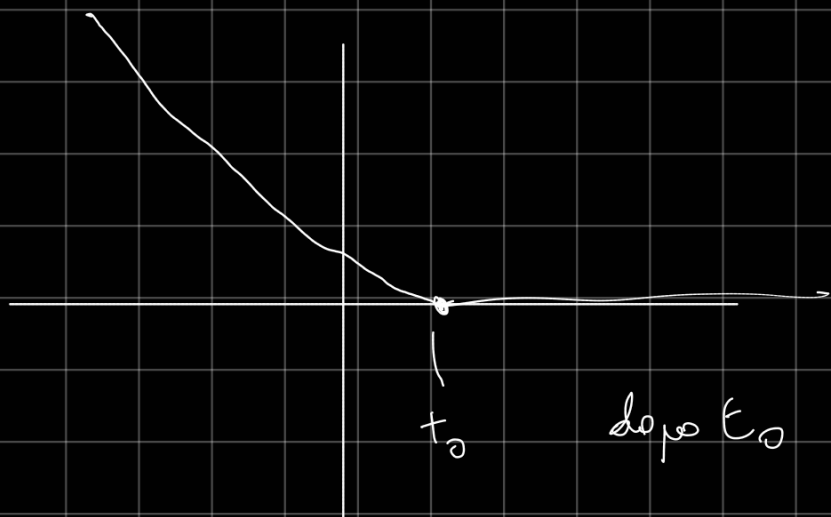
$$\begin{cases} v'(t) = [v(t)]^{1/3} \\ v(t_0) = 0 \end{cases}$$

$$v'(t) = G(v(t))$$

$\uparrow$
Equazioni autonome

$$k \in \mathbb{R}$$

$$v_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \geq t_0 \\ -k \left(\frac{2}{3} (t_0 - t) \right)^{3/2}, & \text{se } t < t_0 \end{cases}$$



t_0 dopo t_0 identicamente nulla

Df. Sia $0 < \alpha < 1$

Sia $B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto. Una

$h: B \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **hölderiana**

di ordine α se:

esiste $M > 0$ t.c.

$\forall x, y \in B, x \neq y$

$$\frac{|h(x) - h(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq M$$



Def.

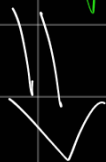
Sia $B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto. Una $h: B \rightarrow \mathbb{R}$
si dice lipschitziana se
esiste $M > 0$ t.c.

$$\forall x, y \in B, \quad x \neq y$$

$$\frac{|h(x) - h(y)|}{|x - y|} \leq M$$

come Holder,
ma con $\alpha = 1$

$$\frac{|h(x) - h(y)|}{|x - y|} \leq |x - y|^{1 - \alpha}$$



$$h'(y) = \lim_{x \rightarrow y} \frac{|h(x) - h(y)|}{|x - y|} = 0$$

$$|h(x) - h(y)| \leq M |x - y|^2$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\ln x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrou} \end{cases}$$

Dof.

Siano (X, d) , $(Y, \tilde{d})$ spazi metrici. Una $F: X \rightarrow Y$

si dice Lipschitziana se esiste $L > 0$

t.c. $\forall x, y \in X$ e'

$$\tilde{d}(F(x), F(y)) \leq L \cdot d(x, y) \quad \square$$

Dof.

Sia (X, d) sp. metrico. Una

$T: X \rightarrow X$ si dice CONTRAZIONE
 se $\exists 0 < c < 1$ t.c. $\forall x, y \in X$
 $d(Tx, Ty) \leq c \cdot d(x, y)$ $\square$

ogni contrazione è una
 f. continua

(del punto fisso)
Teorema di BANACH - CACCIOPOLO

Sia (X, d) spazio metrico COMPLETO
 (ogni succ. di Cauchy è convergente).

Sia $T: X \rightarrow X$ contrazione.

Allora esiste ed è unico

$\bar{x} \in X$ t.c.

$$T(\bar{x}) = \bar{x} \quad \square$$

$x_0 \in X$

$$x_n = T(x_{n-1}) = T^{(n)}(x_0)$$

$$\downarrow$$

$$\bar{x} = T(\bar{x})$$

$$x_1 \neq x_2$$

$$1 \leq C$$

$$x_1 = T(x_1)$$

$$x_2 = T(x_2)$$

$$0 < d(T(x_2), T(x_1)) \leq C \cdot d(x_2, x_1)$$

$$d(x_2, x_1) \leq C \cdot d(x_2, x_1)$$

Teorema di Cauchy-Lipschitz

o come
così si
scrive lui

(Teorema di esistenza e unicità di...)

$$(ca) \begin{cases} v'(t) = g(t, v(t)) \\ v(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un aperto non vuoto,

sia $(t_0, v_0) \in A$. Sia $g: A \rightarrow \mathbb{R}$

continua e lipschitziana rispetto

alla seconda variabile, ovvero: esiste

$$L > 0 \text{ t.c. } \forall (t, z_1)^T, (t, z_2)^T \in A$$

Sia

$$|g(t, z_2) - g(t, z_1)| \leq L |z_2 - z_1|$$

$$\text{Sia } p: K_{a,b} = [t_0 - a, t_0 + a] \times [v_0 - b, v_0 + b] \subseteq A$$

$$M_{a,b} = \max_{(t,z) \in K_{a,b}} |g(t,z)|$$

$$R_{a,b} = \min\left(a, \frac{b}{M_{a,b}}, \frac{1}{L}\right).$$

Allora $\forall 0 < \delta < R_{a,b}$ esiste
sol. ϵ unico

$$y_r: (t_0 - r, t_0 + r) \rightarrow \mathbb{R}$$

soluzione di (a) $\square \leadsto$ *problem
di Cauchy.*

Sviluppo di Taylor di

$\sqrt{1+x}$

centrato in

$\odot$

$$\frac{d}{dx} \sqrt{1+x} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = (2\sqrt{1+x})^{-1} = -1(2\sqrt{1+x})^{-2}$$

$$-1 \cdot \frac{1}{4\sqrt{(1+x)^2}} = -\frac{1}{4\sqrt{1+x}(1+x)} =$$

$$\frac{d^3}{dx^3} = \frac{-1}{4\sqrt{1+x}(1+x)} = -\left(4\sqrt{1+x}(1+x)\right)^{-1}$$

$$4\sqrt{1+x}(1+x)^{-2}$$

$$\frac{1}{(4\sqrt{1+x}(1+x))^2} = \frac{1}{16(1+x)(x^2+2x+1)}$$

$$\frac{1}{16(x^2+2x+1+x^3+2x^2+x)} =$$

$$= \frac{1}{16(x^3+3x^2+3x+1)}$$

$$= \frac{1}{16} \cdot x^3 \quad \underline{x^3}$$

$$\left(\frac{h}{g}\right)' = \frac{h'g - hg'}{g^2}$$

$$\frac{\frac{d}{dx} \frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{(2\sqrt{1+x})^2} = -1 \cdot \frac{\frac{d}{dx} 2\sqrt{1+x}}{(2\sqrt{1+x})^2}$$

$$\frac{\frac{d}{dx} 2\sqrt{1+x}}{2 \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2} (1+x)^{-\frac{1}{2}} \right)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

$$= \frac{1}{4(1+x)\sqrt{1+x}}$$

$$= \frac{\frac{d}{dx} \sqrt{1+x}}{\frac{d}{dx} x^2}$$

$$\text{center of mass in } O = \frac{1}{\frac{4}{2}} x^2$$

$$\frac{x^2}{g}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{-1}{4(1+x)\sqrt{1+x}}$$

$$- \frac{1}{4(1+x)\sqrt{1+x}} - \frac{\frac{d}{dx} 4(1+x)\sqrt{1+x}}{(4(1+x)\sqrt{1+x})^2}$$

$$\frac{d}{dx} (4+x)\sqrt{1+x}$$

$$h \cdot g = h'g + h g'$$

$$= \sqrt{1+x} + 4(1+x) \frac{d}{dx} \sqrt{1+x}$$

$$= \frac{4\sqrt{1+x} + 4(1+x)}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1(6(1+x))^3}{2\sqrt{1+x}}$$

$$\begin{aligned} & 1+x^{\frac{1}{2}} \\ & \frac{1}{2} (1+x)^{-\frac{1}{2}} \\ & \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{1+x} + \frac{4+x}{2\sqrt{1+x}} =$$

$$\frac{2(1+x) + 4 + x}{2\sqrt{1+x}} = \frac{6 + 3x}{2\sqrt{1+x}}$$

$$\frac{6 + 3x}{2\sqrt{1+x}}$$

$$\left(4(1+x)(\sqrt{1+x}) \right)^2$$

$$= \frac{3}{8\sqrt{1+x}(1+x)^2}$$

cancel in ①

$$\frac{\cancel{3}}{\cancel{64}} = \frac{x^3}{16}$$

$$= 16(1+x)^2(1+x)$$

$$16(x^2 + 2x + 1)(1+x)$$

$$16(x^3 + x^2 + 2x^2 + 2x + 1 + x)$$

$$16x^3 + 48x^2 + 48x + 16$$

