

Proof.

Sia (X, d) spazio metrico.

$C \subseteq X$ è chiuso $\Leftrightarrow C \supseteq \text{Acc}(C)$

Dim. di $\Rightarrow$ (poi basta ...)

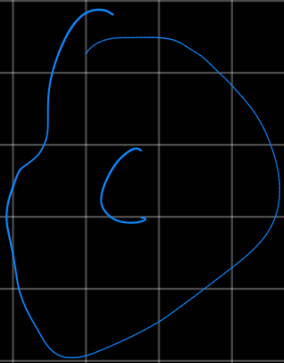
C contiene tutti i suoi
punti di accumulazione

Posso supporre $C \neq \emptyset$ (se no nulla da Dim ...)

Supponiamo per assurdo $\nexists \bar{x} \in \text{Acc}(C)$,

ma $\bar{x} \notin C$

complementare a C



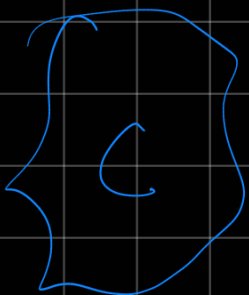
$\bar{x}$

Quindi $\bar{x} \in C^c = A$ che è
un insieme aperto.

Quindi $\bar{x}$ sarà un punto
interno di A , quindi

$\exists r > 0$ t.c. $B(\bar{x}, r) \subseteq A$ e

quindi $B(\bar{x}, r) \cap C = \emptyset$



Assurdo perché $\forall \rho > 0$

$B(\bar{x}, \rho) \cap C$ deve essere
un insieme non vuoto.

Definizione. Sia (X, τ) spazio topologico. Sia $B \subseteq X$. Si dice CHIUSURA di B il seguente

insieme:

$$\overline{B} := \bigcap C$$

$C \supseteq B$
 C chiuso

chiusura di $\emptyset = \emptyset$
chiusura di $X = X$
 $\uparrow$
chiuso

Sia $B \subseteq X$, si dice parte INTERNA di B il seguente insieme:

$$\overset{\circ}{B} := \left\{ x \in B : x \text{ è un punto interno di } B \right\}$$

insieme composto dai suoi punti interni, es, prendo un intervallo chiuso, gli tolgo gli estremi.

Def Sia (X, d) sp. metrico.

$B \subseteq X$. Si dice FRONTIERA

(o bordo) di B :

Falligrafica $\partial B := \{ x \in X : \forall r > 0 \}$

$$\left. \begin{array}{l} B(x, r) \cap B \neq \emptyset, \\ B(x, r) \cap C B \neq \emptyset \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{il viceversa} \\ \text{complementare di } B \end{array}$$

Prop.

Sia (X, d) sp. metrico. Allora:

- 1) K compatto $\Rightarrow$ K chiuso e limitato
 il viceversa non vale.
- 2) K compatto, $C \subseteq K$ chiuso $\Rightarrow C$ compatto
 un chiuso in un compatto è compatto

Def. uno spazio metrico (X, d) per cui K chiuso e limitato $\Rightarrow K$ compatto, si dice **Spazio di Montel**.

Oss. Non tutti gli spazi metrici sono spazi di Montel.

Oss. $\mathbb{R}^n$ dotato della norma euclidea è di **MONTTEL**

Dimostrazione di 1)

Supponiamo $K \neq \emptyset$.

dimostriamo che K è limitato.

Se non lo fosse, esisterebbe (X_n) a supporto in K e un $\bar{X} \in X$ t.c.

$$(d(\bar{X}, X_n)) \rightarrow +\infty$$

Lemma

(X, d) sp. metrico.

$(X_n) \rightarrow \tilde{X} \Rightarrow \text{supporto } \supset (X_n)$ limitato.

Dim per ipotesi $d(X_n, \tilde{X}) \rightarrow 0$,
Tende a 0

Quindi, ad esempio, esiste n_1 t.c. se

$n \geq n_1$, allora $d(X_n, \tilde{X}) \leq 1$. Per cui
 $\forall n \in \mathbb{N} \quad d(X_n, \tilde{X}) \leq \max \left\{ 1, \max_{k \leq n_1} d(X_k, \tilde{X}) \right\}$

Poiché K è compatto, allora

$\exists (X_{\sigma(n)} \rightarrow \tilde{X})$. Ma
 $(d(X_{\sigma(n)}, \tilde{X})) \rightarrow +\infty$

e quindi anche (X_n) dovrebbe essere illimitato.

ASSORDO per il precedente Lemma.

Dimostriamo ora che K è chiuso.

Lemma

Sia (X, d) sp. metrico.

$A \subseteq X$, $\bar{x} \in \text{Acc}(A)$. Allora

$\exists (a_n) \rightarrow \bar{x}$, $\text{spt}(a_n) \in A \setminus \{\bar{x}\}$

Dim. Ad esempio $\forall n \geq 1$ sia

$a_n \in B(\bar{x}, \frac{1}{n}) \cap A$

È facile dimostrare che

$(a_n) \rightarrow \bar{x}$.

$\text{spt}(x_n) \subseteq K$

→ Premo $(x_n) \rightarrow \bar{x}$ come dal precedente lemma. Da lei

posso estrarre sottosuccessione

$$(x_{\sigma(m)}) \rightarrow \overline{\overline{x}} \in K. \quad \text{Ma, essendo}$$

già $(x_n) \rightarrow \overline{x}$, deve essere

$$\overline{\overline{x}} = \overline{x} \in K.$$

applico lemma, trovo una successione x_n che tende a $\overline{x}$ (e posso perché $\overline{x}$ è un punto di acc.), sempre per il lemma, il spt lo prende in K .

da lei estraggo una sottosucc che tende a un elemento di K . $\overline{\overline{x}} = \overline{x}$

qui punto di accumul. appartiene all'insieme di partenza, quindi K è chiuso