

Dim. di qualcosa di ieri

- $K_{a,b} = [t_0 - a, t_0 + a] \times [v_0 - b, v_0 + b] \subseteq A$
- $M_{a,b} = \max_{K_{a,b}} |g(t, x)| > 0$
- L costante di Lip di g
- $R_{a,b} = \min(a, \frac{b}{L}, \frac{1}{L})$

Dim di Cauchy-Lipschitz

$$0 < r < R_{a,b}, \quad \bar{I}_r := [-r + t_0, +r + t_0].$$

$$C_b(\bar{I}_r) := \left\{ v \in C^0(\bar{I}_r) : \forall t \in \bar{I}_r, \right. \\ \left. |v(t) - v_0| \leq b \right\}$$

Vogliamo risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) \\ y(t_0) = v_0 \end{cases}$$

Dimostrare che
 $\bar{I}_r$ è uno spazio metrico completo.

Esso è uno spazio metrico completo con la

metrica indotta da quella delle funzioni

continue : $d(u_1, u_2) = \max_{\bar{I}_r} |u_1(t) - u_2(t)|$

Dipatti:

Sia (u_n) successione di Cauchy in $C_b(\bar{I}_r)$.

Allora essa sarà di Cauchy in $C^0(I_r)$.

Quindi $u_n \xrightarrow{\text{unif}} \bar{u} \in C^0(\bar{I}_r)$.

Ma $\forall t \in \bar{I}_r$ $u_n(t) \rightarrow \bar{u}(t)$

$$|u(t) - u_0| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n(t) - u_0| \leq b$$

Risolvere Eq.

$\forall V$ di valore = risolvere problema di Cauchy

$$(V_0) \quad u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t g(s, u(s)) ds$$

$$T: C_b(\bar{I}_r) \rightarrow T(w) = u_0 + \int_{t_0}^t \underbrace{g(s, w(s))}_{\substack{\text{approssimare} \\ \text{descriere il} \\ \text{dominio di } b}} ds$$

Usando questa applicaz. posso scrivere

$$T(u) = u$$

mi riduco a verificare le ipotesi di Banach $C^0([0, T])$, devo verificare che sia una contrazione.

1) Verifichiamo che $T(C_b(\overline{I}_v)) \subseteq C_b(\overline{I}_v)$.

Sia $t \in \overline{I}_v$. Devo dimostrare che

$$|T(w)(t) - v_0| \leq b$$

$$|T(w)(t) - v_0| = \left| \int_{t_0}^t g(s, w(s)) ds \right| \leq$$

$$\leq \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} |g(s, w(s))| ds =$$

$$= \begin{cases} \int_{t_0}^t |g(s, w(s))| ds & \text{se } t \geq t_0 \\ \int_t^{t_0} |g(s, w(s))| ds & \text{se } t \leq t_0 \end{cases}$$

In entrambi i casi ho che

$$\int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} |g(s, w(s))| ds \leq v \cdot M_{a, b} < b$$

perché $v < \frac{b}{M_{a, b}}$.

2) Dimostrare ora che T è una contrazione. Sia $w_1, w_2 \in C_b(\bar{I}_r)$.

$$\begin{aligned}
 & |T(w_1)(t) - T(w_2)(t)| = \\
 & = \left| \int_{t_0}^t [g(s, w_1(s)) - g(s, w_2(s))] ds \right| \leq \\
 & \leq \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} |g(s, w_1(s)) - g(s, w_2(s))| ds \leq \\
 & \leq \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} L \cdot |w_1(s) - w_2(s)| ds \leq \\
 & \leq L \cdot \int_{\min(t_0, t)}^{\max(t_0, t)} d(w_1, w_2) ds = \\
 & = L \cdot r \cdot d(w_1, w_2).
 \end{aligned}$$

Quindi: $\forall t \in \bar{I}_r, \quad e^1:$

$$\begin{aligned}
 & |T(w_1)(t) - T(w_2)(t)| \leq L \cdot r \cdot d(w_1, w_2). \\
 & d(T(w_1), T(w_2)) \leq L \cdot r \cdot d(w_1, w_2).
 \end{aligned}$$

Ma $L \cdot r < 1 \Leftrightarrow r < \frac{1}{L}$, quindi

T è una contrazione in $C_b(\overline{I}_r)$.

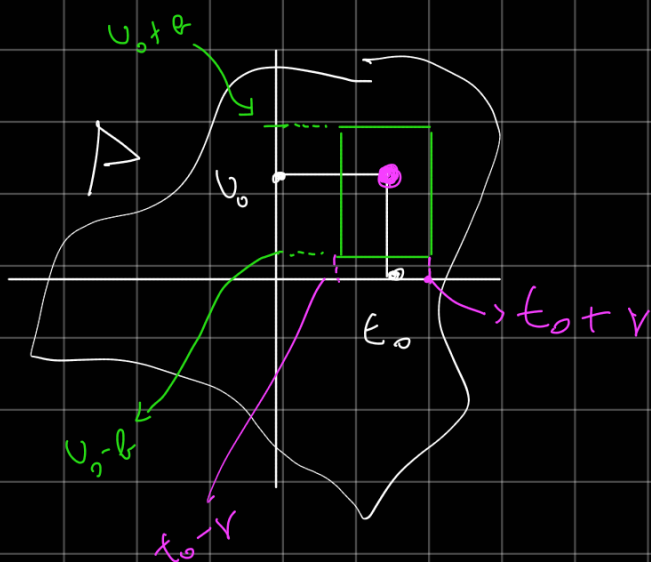
Allora, per il teor. di Banach -

- Caccioppoli, fissato $0 < r < R_{q,b}$,

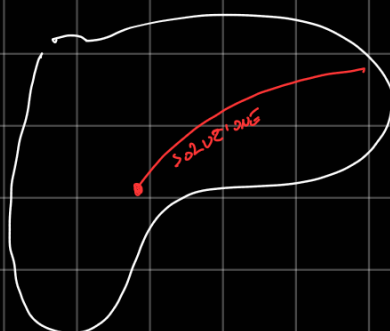
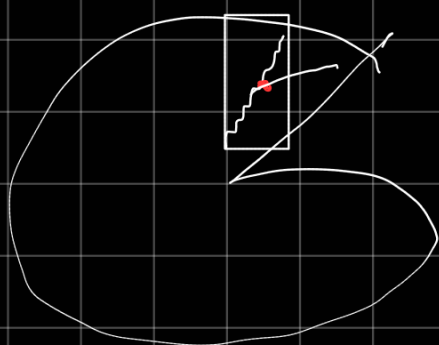
$\exists!$ $v \in C_b(\overline{I}_r)$ che risolve $v = T(v)$ e

quindi (C_q) . $\square$

$$\gamma_r: [-r+t_0, r+t_0] \rightarrow [v_0-b, v_0+b]$$



(il teor. mi impone di rimanere dentro il rettangolo)



questa soluzione
non entra in nessun
rettangolo

Prop.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto non vuoto.

$g: A \rightarrow \mathbb{R}$ continua e t.c. $\exists L > 0$

per cui, $\forall (t, z_1)^T, (t, z_2)^T \in A$

$$|g(t, z_1) - g(t, z_2)| \leq L \cdot |z_1 - z_2|.$$

Sia I intervallo generalizzato,

$t_0 \in I$, $(t_0, u_0)^T \in A$. Siano poi

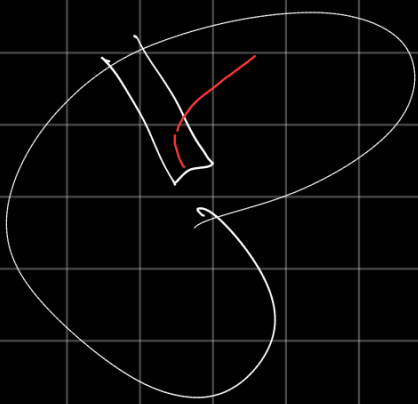
$u_1, u_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ soluzioni per lo (CA)

Allora $u_1 \equiv u_2$ $\square$

$$\begin{cases} u'(t) = g(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

$$* (t, u(t))^T \in A \quad u: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$\checkmark$



Lemma di GROWALL

Sia $\varphi: [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua
e non negativa. Valga $\forall t \geq t_0$,
(*) $\varphi(t) \leq M + L \cdot \int_{t_0}^t \varphi(s) ds$, $L > 0$, $M \geq 0$

Allora

$$\varphi(t) \leq M e^{L(t-t_0)} \quad \square$$

OSS.

Se $M = 0$, allora $\varphi = 0$ $\square$

Dim.

Sia $z \geq 0$. Moltiplichiamo ambo i
 membri di $(*)$ per $e^{-L(z-t_0)}$

$$\varphi(z) \cdot e^{-L(z-t_0)} \leq M \cdot e^{-L(z-t_0)} + L e^{-L(z-t_0)}$$

$$\varphi(z) \cdot e^{-L(z-t_0)} - L e^{-L(z-t_0)} \int_{t_0}^z \varphi(s) ds \leq M \cdot e^{-L(z-t_0)}$$

$$\left[e^{-L(z-t_0)} \cdot \int_{t_0}^z \varphi(s) ds \right]' \leq \frac{-M}{L} \cdot [e^{-L(z-t_0)}]'$$

in z tra t_0 e t

$$e^{-L(t-t_0)} \cdot \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \leq -\frac{M}{L} [e^{-L(t-t_0)} - 1]$$

dividiamo tutto per $e^{-L(t-t_0)}$

$$= \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \leq \frac{M}{L} e^{L(t-t_0)} - \frac{M}{L}$$

$$\varphi(t) \leq L \int_{t_0}^t \varphi(s) + M \leq M e^{L(t-t_0)}$$

Dim le prop. per $I = [t_0, T]$

Poniamo $w(t) = u_2(t) - u_1(t)$

$$u_i(t) = u_0 + \int_{t_0}^t g(s, u_i(s)) ds, \quad i=1,2.$$

$$w(t) = \int_{t_0}^t [g(s, u_2(s)) - g(s, u_1(s))] ds$$

$$|w(t)| \leq \int_{t_0}^t |g(s, u_2(s)) - g(s, u_1(s))| ds \leq$$

Ora
applico
la Lip.

$$\leq \int_{t_0}^t L \cdot |u_2(s) - u_1(s)| ds = L \int_{t_0}^t |w(s)| ds$$

$$\varphi(t) = |w(t)|, \quad \varphi(t) \leq L \cdot \int_{t_0}^t \varphi(s) ds.$$

Allora, per il lemma di Gronwall, $\varphi \equiv 0$.

Quindi $w \equiv 0$ $\square$

Def.

Sia $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ continua, e sia dato

$$\begin{cases} u'(t) = g(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Una $\tilde{v}: I \rightarrow \mathbb{R}$ soluz. di (Ca) si dice
una estensione di $v: I \rightarrow \mathbb{R}$ soluz. di
(Ca) se $\exists \underline{I}$ e $\tilde{v}|_{\underline{I}} \equiv v$ $\square$

Def.

Una soluzione $\tilde{v}$ di v si dice
massimale se essa non ammette
estensioni. (non la si può estendere
ulteriormente).

Def.

Sia $A = \underline{I} \times \mathbb{R}$, $\underline{I}$ intervallo
generalizzato aperto. Una
soluzione si dice globale se
 v ha $\underline{I}$ come dominio $\square$

Esistenza e unicità Soluzione Massimale
Prop. Sia f Lipschitziana

rispetto alla 2^a variabile su A , e
continua.

Allora, dato $(t_0, v_0)^T \in A$,

esiste ed è unica una soluzione

$v_{\max} : J \rightarrow \mathbb{R}$ per (Ca) tale che

$v_{\max}$ è estensione di qualsiasi altra
soluzione di (Ca) .

Essa è anche una soluzione
massimale. $\square$

Dim. (unicità)

Supponiamo $\tilde{v} : J \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{\tilde{v}} : J \rightarrow \mathbb{R}$

verificanti le precedenti tesi

$$\tilde{J} \supseteq \tilde{\tilde{J}} \text{ e } \tilde{\tilde{J}} \supseteq \tilde{J} \Rightarrow \tilde{\tilde{J}} = \tilde{J} = J$$

Allora ho $\tilde{v}, \tilde{\tilde{v}} : J \rightarrow \mathbb{R}$ sol,

Quindi per il teorema precedente
di unicità, $\tilde{u} = \tilde{u}$ $\square$

Def.

Sia $g: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $A \neq \emptyset$ e
aperto. Allora essa si dice
localmente LIPSCHITZIANA rispetto
alla 2^a variabile se:

$\forall (t_0, u_0) \in A$, $\exists U_{t_0, u_0}$ intorno
aperto di $(t_0, u_0)^T$ per cui
insieme aperto che
contiene A

$h|_{A \cap U_{t_0, u_0}}$ è lipschitziana rispetto

alla seconda variabile. $\square$

OSS.

1) Il teo. di Cauchy-Lipschitz.

continua o valore se g è loc.
lip. rispetto alla 2^a variabile

2) Il teorema di esistenza e unicità
della soluzione massimale vale
nelle sole ipotesi di locale lipschitzianità
rispetto la 2^a variabile. $\square$

$$A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} v'(t) = [v(t)]^2 \\ v(0) = k \end{cases}$$

$$g(z) = z^2$$

$$|z_1^2 - z_2^2| = |z_1 - z_2| |z_1 + z_2| =$$

lasciamo costante
questa differenza

$$= |h| \cdot |2z + h|$$

$$z+h, \quad z, \quad h > 0$$

all'infinito di tende all'infinito

quindi non è GLOBAL. LIP, ma LOCALM. si.

OSS.

$$g(t, y)$$

Sia $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ parzialmente derivabile
rispetto alla 2^a variabile,

con $\frac{\partial g}{\partial y}$ limitata. Allora

g è LIPSCHITZIANA rispetto alla
2^a variabile $\square$

Costante di LIP

$$|g(t, z_1) - g(t, z_2)| = \left| \frac{\partial g}{\partial y}(t, z) \right| \cdot |z_1 - z_2|$$

$$L := \sup_{(t, z) \in A} \left| \frac{\partial g}{\partial y}(t, z) \right|$$

Caso

0) $k = 0 \Rightarrow \exists!$ Sol globale $v \equiv 0$

1) $k \neq 0$ In un intorno sufficientemente
piccolo di $t_0 = 0$,

$$\frac{v'(t)}{[v(t)]^2} = 1 \Leftrightarrow \left[-\frac{1}{v(t)} \right]' = 1$$

$$-\frac{1}{v(t)} + \frac{1}{k} = t$$

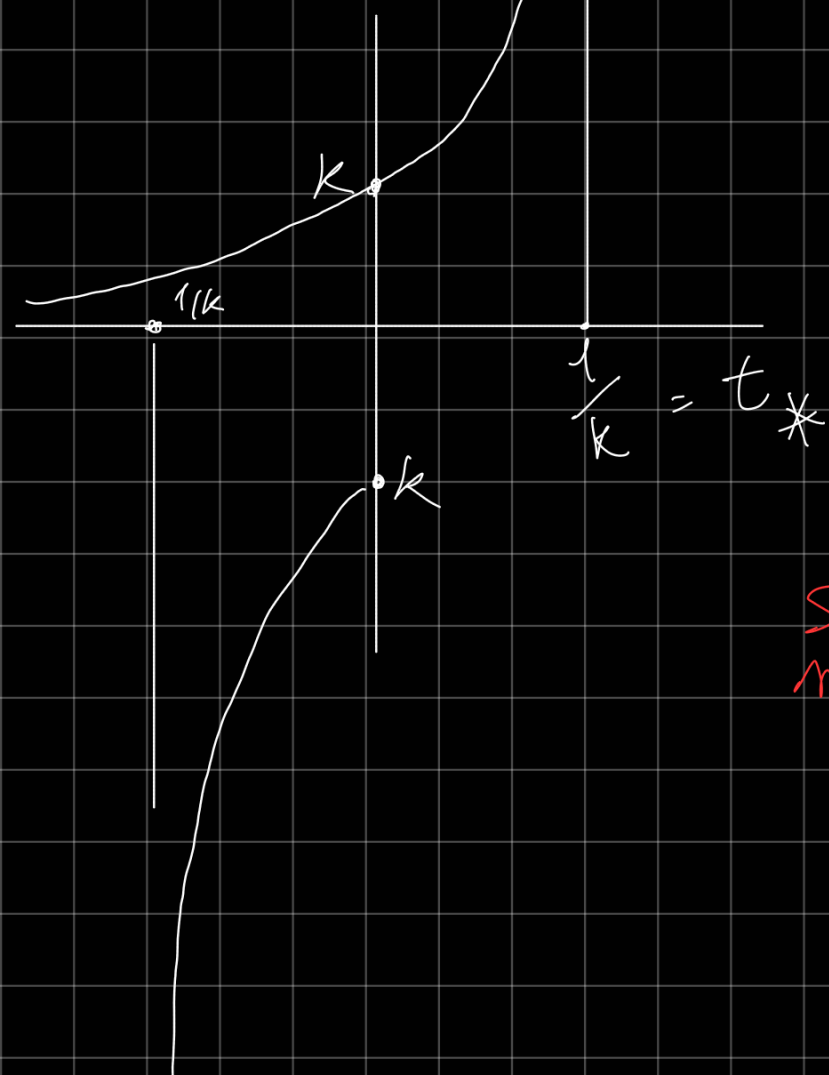
$$-\frac{1}{v(t)} = t - \frac{1}{k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v(t) = \frac{k}{-kt - 1}$$

quanto ho posso
prolungare questa
soluzione

$$k > 0$$

$$(-\infty, 1/k)$$



Soluzione massimale
non è una soluzione
globale.