

Lemma 31

Esiste ed è unica

$$y: \bar{I}_r \rightarrow \mathbb{R} \text{ soluz.}$$

$$\rightarrow [v_0 - \epsilon, v_0 + \epsilon]$$

È stato dimostrato che $\exists!$ $y \in C^0(\bar{I}_r)$
soluz. di (Ca).

Dimostriamo ora che una qualsiasi altra

$$\tilde{y}: \bar{I}_r \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua che risolve}$$

$$\tilde{y}(t) = v_0 + \int_{t_0}^t g(s, \tilde{y}(s)) ds \text{ coincide con } y.$$

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| \leq \int_{t_0-r}^{t_0+r} |g(s, y(s)) - g(s, \tilde{y}(s))| ds \leq$$

$$\leq L \int_{t_0-r}^{t_0+r} |y(s) - \tilde{y}(s)| ds = \underbrace{r \cdot L}_{0 < C < 1} \cdot d(y, \tilde{y}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(y, \tilde{y}) \leq C \cdot d(y, \tilde{y}) \Rightarrow y \equiv \tilde{y} \quad \square$$

(*) $A = I \times \mathbb{R}$, g continua e localmente
lip. rispetto alla seconda variabile

Def. (funzioni sottoslineare (sublineare))

Una $g: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice sottoslineare
rispetto alla 2^{ma} variabile se

$\exists \varphi, \psi: I \rightarrow \mathbb{R}$, φ, ψ continua,

$\varphi, \psi \geq 0$ t.c. $\forall (t, z)^T \in A$

$$|g(t, z)| \leq \varphi(t) + \psi(t) \cdot |z| \quad \square$$

Teor.

Sia g sottoslineare e soddisfacente (*)

Allora esiste ed è unica la soluzione
globale per $\begin{cases} y'(t) = g(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad \square$

$$g(z) = z^2 \quad y'(t) = y^2(t)$$

$$|z^2| = z^2 \leq \psi(t) + \psi(t) |z|$$

questa non

può essere vera.

$$|z| \leq \frac{\psi(t)}{|z|} + \psi(t)$$

$\rightarrow +\infty$ $\rightarrow 0$

costante

questa funzione
non può essere
sottolineare

$\alpha > 1$

$$\begin{cases} y'(t) = |y(t)|^\alpha \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

tutto $\mathbb{R}$.

sottolineare
condizione suff.
ma non necessaria

$$\begin{cases} y'(t) = h(t) \cdot g(y) \\ y(t_0) = y_0 \\ h, g \in C^0 I \end{cases}$$

(1) Se $g(y) = 0$, allora $y = y_0$ è sol.

(2) Supponiamo $g(y_0) \neq 0$

Sia $y: [t_0 - r, t_0 + r] \rightarrow \mathbb{R}$ sol. di (1)

$g \circ y: [t_0 - r, t_0 + r] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua

Allora $\exists p > 0$ t.c. $g \circ \gamma|_{[t_0-r, t_0+r]} \neq 0$
 $0 \leq p \leq r$.

Quindi posso in tal intorno scrivere

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = h(t)$$

Chiamo, in un intorno opportunamente piccolo,

$$[-R + y_0, R + y_0],$$

$$\Gamma(z) = \int_{y_0}^z \frac{1}{g(s)} ds$$

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = [\Gamma(y(t))]'$$

$$[\Gamma(y(s))]' = h(s)$$

$$F(t) = \int_{t_0}^t h(s) ds$$

$$\int_{t_0}^t [\Gamma(y(s))]' ds = \int_{t_0}^t h(s) ds = F(t)$$

$$T(y(t)) - T(y(t_0)) = F(t)$$

$$T(y(t)) = F(t)$$

Ma T è sicuramente C^1 strettamente

monotona e definita in $[y_0 - R, y_0 + R]$

Quindi T è invertibile con $T^{-1} \in C^1$.

$$y(t) = (T^{-1} \circ T)(t)$$

$$\begin{cases} y(t)y'(t) = \sin t \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} (y^2(s))' = \sin s$$

$$\frac{1}{2} [y^2(t) - y_0^2] = -\cos t + 1$$

$$y^2(t) = 2(1 - \cos t) + y_0^2$$

$$y(t) = \pm \sqrt{2(1 - \cos t) + y_0^2}$$

$$y(0) = y_0$$

Quindi: scegli $+$ se $y_0 > 0$

scegli $-$ se $y_0 < 0$

Caso $y_0 = 0$

$$\pm \sqrt{2(1 - \cos t)} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \cos t}$$

$$\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{1 - \cos h}}{h} \right) \quad \text{app. l'Hôpital}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \sqrt{2} \cdot \text{Sign}(h) \sqrt{\frac{1 - \cos t_0}{t^2}} =$$

$$\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm 1 \quad \text{limite non esiste
ha limite dx e sx
diversi sempre}$$

$$\begin{cases} y(t) y'(t) = \sin t \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Sistemi di equazioni differenziali

del 1° ordine in forma normale.

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo generalizzato.

$$\underline{x}(t) = (x_0(t), x_1(t), \dots, x_{n-1}(t))^T \in \mathbb{R}^n$$

$$\underline{x} = (x_0, \dots, x_{n-1})$$

$$x_j : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\underline{x} = \text{vettore} = \bar{x}$$

$$\underline{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$g : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$g = \begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$$

$$g_j : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \underline{x}'(t) = g(t, \underline{x}(t)) \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0'(t) = g_0(t, x_0(t), \dots, x_{n-1}(t)) \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) = g_{n-1}(t, x_0(t), \dots, x_{n-1}(t)) \end{cases}$$

QSS

$$v: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g: I \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v^{(m)}(t) = g(t, v(t), v'(t), \dots, v^{(m-1)}(t))$$

$$X = (v^{(0)}, v^{(1)}, \dots, v^{(m-1)})^T$$

$$x_0 = v, \quad x_1 = v^{(1)}, \dots, x_{m-1}$$

$$x_0' = x_1, \quad x_1' = x_2, \dots, x_{m-1}' = v^{(m)}$$

(***)

$$\begin{cases} x_0' = x_1 \\ x_1' = x_2 \\ \vdots \\ x_{m-2}' = x_{m-1} \\ x_{m-1}' = g(t, x_0, x_1, \dots, x_{m-1}) \end{cases}$$

$$g_0(t, z_0, \dots, z_{m-1}) = z_1$$

$$g_1(t, z) = z_2$$

$$g_{m-2}(t, z) = z_{m-1}$$

$$g_{m-1}(t, z) = g(t, z_0, \dots, z_{m-1})$$

$$g = (g_0, \dots, g_{m-1})^T$$

$$\underline{x}'(t) = \underline{g}(t, \underline{x}(t))$$

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto.

Sia $G: \mathcal{I} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ si dice

LIPSCHITZIANA rispetto alla 2^{ma} variabile

se esiste $L > 0$ t.c.

$$\forall (t, \underline{z}_i)^T \in \mathcal{I} \times \Omega \quad i=1,2, \text{ e'}$$

$$\|G(t, \underline{z}_2) - G(t, \underline{z}_1)\|_m \leq L \cdot \|\underline{z}_2 - \underline{z}_1\|_m \quad \square$$

Def. (**sottolineare**)

Nelle precedenti ipotesi per G , essa

si dice **SOTTOLINEARE** rispetto alla 2^{ma}

variabile se $\exists \varphi, \psi: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$, continue

e non negative t.c.

$$\forall (t, \underline{z})^T \in \mathcal{I} \times \Omega \text{ e'}$$

$$\|G(t, \underline{z})\|_m \leq \varphi(t) + \psi(t) \|\underline{z}\|_m \quad \square$$

