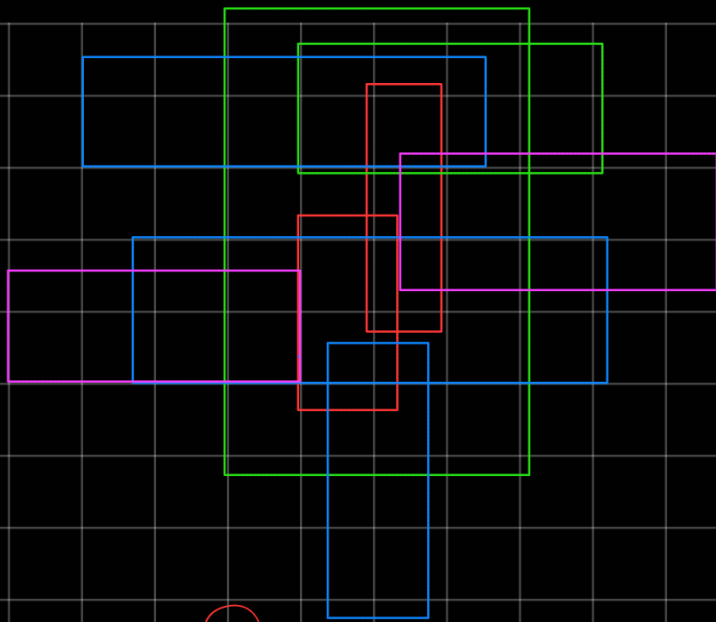




Teorema Piccolo Vettoriale.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto non vuoto

$G: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua,

$(t_0, \underline{x}_0)^T \in A$, Allora $\exists \delta > 0$ t.c.

$$\begin{cases} \underline{y}'(t) = G(t, \underline{y}(t)) \\ \underline{y}(t_0) = \underline{x}_0 \end{cases}$$

Prob. di Cauchy
caso vettoriale

ammette una soluzione $\underline{y}: (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ □

Teo. Piccolo, esistenza di almeno una soluz. locale

Teorema di Cauchy - Lipschitz vettoriale

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto non vuoto

$G: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua, $(t_0, \underline{x}_0)^T \in A$

Sia inoltre G Lipschitziana
rispetto alla 2^{ma} variabile. Allora

$\exists \delta \neq \emptyset$ intervallo generoso
contenente t_0 per cui, posto

$$(C_A \text{ vett}) = \begin{cases} \underline{y}'(t) = G(t, \underline{y}(t)) \\ \underline{y}(t_0) = \underline{x}_0 \end{cases}$$

$\exists! \underline{y} : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ sol. di $(C_A \text{ vett})$

Inoltre $\tilde{\underline{y}} : \tilde{\mathcal{I}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ è soluzione

allora $\tilde{\underline{y}}|_{\mathcal{I} \cap \tilde{\mathcal{I}}} \equiv \underline{y}|_{\mathcal{I} \cap \tilde{\mathcal{I}}}$ nel
dominio
comune
le soluzioni
devono
coincidere.

Teorema di esistenza globale

Sia $A = \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n$. Sia G come

nelle ipotesi del Teorema di Cauchy-Lip,
e sia inoltre stolinerare rispetto alla
2^{nda} variabile. Allora

$\exists! \underline{y} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ soluzione globale $\square$

quindi oltre a questa è la soluzione
globale rispetto a quel dominio
Se ho dip. 2^a var e lip. ^{rispetto alla}, per la
locale Lipschitz, allora l' $\exists$ globale,
ma anche unicità, di conseguenza

le altre soluzioni le otteniamo
restringendo la soluzione globale
restringendo il dominio.

Se manca unicità, oltre al dominio
cambia anche la legge.

Teorema

Sia $g: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua,
 localmente lip. risp. alla 2^{nda} var.
 e ~~st~~ olivare risp. alla 2^{nda} var.

Allora $\exists!$ $y \in C^n(I)$ che

risolve

$$\begin{cases} y^{(n)}(t) = g(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t)) \\ y(t_0) = y_{0,0} \\ y^{(1)}(t_0) = y_{0,1} \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{0,n-1} \end{cases}$$

o. fissare

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = f(t, \underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t)) \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}_{0,0} \\ \dot{\underline{x}}(t_0) = \underline{x}_{0,1} \end{cases}$$

$A \in M(n \times n)$

$$A \begin{pmatrix} \epsilon \\ \frac{x}{\delta} \end{pmatrix} \xrightarrow{\delta} \mathbb{R}^n$$

$$h: J \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$A(t, x) = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

Equaz. è lineare se si può scrivere così.

$$X: J \rightarrow \mathbb{R}$$

matrice

$$\begin{cases} X'(t) = A(t) \cdot X(t) + h(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

$$X(t_0) = X_0$$

Posso separarlo componente per componente

$$\begin{cases} x'_1(t) = \sum_{j=1}^n a_{1j}(t) \cdot x_j(t) + h_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = \sum_{j=1}^n a_{nj}(t) \cdot x_j(t) + h_n(t) \end{cases}$$

$$x'_n(t) = \sum_{j=1}^n a_{nj}(t) \cdot x_j(t) + h_n(t)$$

solve $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$

$$a_0, a_{n-1}: J \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y^{(n)}(t) = a_0 y(t) + a_1 y'(t) + \dots + a_{n-1}(t) y^{(n-1)}(t) + h(t)$$

termine noto

Eq. differenziale in forma normale omogenea / non omogenea (no termine noto)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \dots & \dots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

$$\underline{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ p(t) \end{pmatrix}$$

$$x_1 = y(t)$$

$$x_2 = y^{(1)}(t)$$

$\vdots$

$$x_n = y^{(n-1)}(t)$$

~~★~~ equivalente a $\underline{x}'(t) = A(t) \cdot \underline{x}(t) + \underline{p}(t)$