

$$\underline{x}'(t) = A(t) \cdot \underline{x}(t) + \underline{p}$$

$$x: J \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad J \text{ int. gener.} \quad \underline{p}: J \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\underline{p}: J \rightarrow \mathbb{R}^n \quad A: J \rightarrow M(n \times n), \quad A = (\alpha_{ij}^{(t)})_{1 \leq i, j \leq n}$$

$$\alpha_{ij} \text{ continue, } \forall 1 \leq i, j \leq n \quad \underline{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \text{ continue}$$

$$\underline{y}' = \underline{g}(t, \underline{y}(t))$$

$$\underline{g}: J \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \underline{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$$

$$g_i(t, \underline{z}) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^{(t)} z_j + p_j(t)$$

loc. lip. rispetto la $\underline{z}$ -var,
anche la sovralineari.

$$Ca_{\text{lim}} = \begin{cases} \underline{x}'(t) = A(t) \cdot \underline{x}(t) + \underline{p}(t) \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \end{cases}$$

Teo. ($\exists!$ globale per il caso lineare)

Siano $\alpha_{ij}: J \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $1 \leq i, j \leq n$.

Sia $\underline{p}: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua.

+

Allora (Ca_{lim}) ammette una e una sola soluz. globale.

$$v^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(t) v^{(j)}(t) + p(t)$$

$$\{ \underline{x}_0 = v(t), \quad \underline{x}_1 = v^{(1)}(t), \quad \underline{x}_{n-1} = v^{(n-1)}(t) \}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & & & a_{n-1}(t) \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ h(t) \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{l} \sim \\ (a_{lim}) \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} v^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) v^{(j)}(t) + h(t) \\ v(t_0) = v_{0,0} \\ \vdots \\ v^{(n-1)}(t_0) = v_{0,n-1} \end{array} \right. \quad \underline{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0,0} \\ v_{0,1} \\ \vdots \\ v_{0,n-1} \end{pmatrix}$$

Teor.

Siano $a_j: I \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq j \leq n-1$ continue;

sia $h: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora **esiste**

ed è unica una soluzione globale di

classe $C^n(I)$ per $(\sim (a_{lim}))$. $\square$

*derivabile n volte
con derivata continua*

Esempio (caso $n=1$)

$$v'(t) = a_0(t) v(t) + h(t)$$

ho 2 soluzioni (?)

$$* w'(t) = a_0(t) w(t) + h(t)$$

$$v = w - u$$

sottraendo e riaddando
la lineare

$$(w - u)'(t) = a(t)(w - u)(t)$$

$$v'(t) = a_0(t)v(t)$$

$$w(t) = w(t) - u(t) + u(t) = v(t) + u(t)$$

tempo fisso v , che è una
sol. particolare del
sistema

Prop.

Una qualsiasi soluzione di (*) si ottiene
sommando una soluzione particolare di (*) ad una
generica soluzione della equazione omogenea
associata

$$y'(t) = a(t)y(t) \quad \square \quad \text{risolviamo questa}$$

Sia $t_0 \in I$.

$$(hom) \begin{cases} y'(t) = a(t)y(t) \\ y(t_0) = K \end{cases}$$

1) Se $K = 0$, $y = 0$ è l'unica sol. globale di (hom)

2) Se $K \neq 0 \quad \exists (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $\delta > 0$ per cui

$$y|_{(t_0 - \delta, t_0 + \delta)} \neq 0.$$

In I_S ho $\frac{y'(t)}{y(t)} = a(t)$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \left(\ln(|y(t)|) \right)' = a(t)$$

integrando...
calcolando prop. funz.
calcolo integrale

$$\ln(|y(t)|) - \ln(|k|) = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

$$\ln\left(\left|\frac{y(t)}{k}\right|\right) = \int_{t_0}^t a(s) ds \quad \frac{y(t)}{k} = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$$

$$y(t) = k \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$$

= espressione di
tutta la soluzione
globale.

Supponiamo di $\vec{0}$

Sono soluzioni = Sono vettori

Sono soluz. = soluzioni

lo $\vec{0}$ è la f identicamente nulla.

isomorfismo tra R e generica soluzione.

2° passo: alla ricerca di una sol. particolare

per la non omogenea: metodo della variazione

della costante. Cerco una soluzione del tipo

$$v(t) = c(t) \cdot w(t), \text{ dove } w(t) \text{ è una sol.}$$

della omogenea non identicamente nulla.

Suppongo $c \in C^1(I)$

$$(c(t) w(t))' = a(t) \cdot (c(t) w(t)) + h(t)$$

$$c'(t)w(t) + c(t)w'(t) = c(t) \cdot a(t) \cdot w(t) + h(t)$$

$$c'(t) - h(t) + c(t) [w'(t) - a(t)w(t)] = 0$$

$$c'(t) = \frac{h(t)}{w(t)}$$

$$c(t) - c(t_0) = \int_{t_0}^t \frac{h(s)}{w(s)} ds$$

Posso supporre $c(t_0) = 0$. Allora posso prendere

$$c(t) = \int_{t_0}^t \frac{h(s)}{w(s)} ds \quad \text{Quindi}$$

$v(t) = c(t) \cdot w(t)$ è sol. particolare per $y'(t) = a(t)y(t) + h(t)$

Allora la Sol. generale per $y'(t) = a(t)y(t) + h(t)$ è

$$y(t) = \left(\int_{t_0}^t \frac{h(s)}{w(s)} ds \right) \cdot w(t) + k \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$$

Scegliamo ad esempio $w(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)$

Allora ottengo:

$$\exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right) \left[\int_{t_0}^t h(s) \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^s a(r) dr\right) ds + k \right]$$

Es. Varulorn

$$y'(t) = t y(t) + t$$

Studiamo omogenea.

$$(1) v'(t) = x v(t)$$

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = t \left[\ln(|v(t)|) \right]' = t$$

$$\ln \left(\frac{|v(t)|}{k} \right) = \frac{t^2}{2}, \quad v(t) = k \exp \left(\frac{t^2}{2} \right)$$

$$c(t) \cdot e^{t^2/2} \quad \left(c(t) \cdot e^{t^2/2} \right)' = t c(t) \cdot e^{t^2/2} + t$$

$$c'(t) \cdot e^{t^2/2} + \cancel{c(t) \cdot t \cdot e^{t^2/2}} = \cancel{t c(t) e^{t^2/2}} + t$$

$$c'(t) = t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} = - \left(e^{-\frac{t^2}{2}} \right)' \quad c(t) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$c(t) \cdot e^{t^2/2} = - e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot e^{t^2/2} = -1$$

Tec.

Sia $A(t) = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ continua, $a_{ij}: J \rightarrow \mathbb{R}$. Allora

l'insieme delle soluzioni di $\textcircled{*} \underline{x}'(t) = A(t) \cdot \underline{x}(t)$ è

uno spazio vettoriale di dimensione n $\square$
dove n è esattamente l'ordine della matrice.

DIM che una qualsiasi combinazione di soluzioni è sempre una sol.

② Sia V insieme delle sol. di $\textcircled{*}$.

Verifichiamo che V è sp. vettoriale. $\underline{v}^{(t)} \equiv 0$ risolve.

Siano $v_1, v_2 \in V$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Verifichiamo che $(\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2) \in V$.

$$\text{Se } i=1,2, \quad \underline{v}_i' = A \underline{v}_i = \alpha_i \underline{v}_i' = \alpha_i A \underline{v}_i \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_i \underline{v}_i)' = A(\alpha_i \underline{v}_i), \quad \text{Quindi}$$

$$(\alpha_1 \underline{v}_1)' + (\alpha_2 \underline{v}_2)' = A(\alpha_1 \underline{v}_1) + A(\alpha_2 \underline{v}_2) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2)' = A \cdot (\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2)$$

OSS

Sia W spazio vettoriale, $n \in \mathbb{N}^*$ ed esista un isomorfismo di spazi vettoriali

$$l: \mathbb{R}^n \rightarrow W. \quad \text{Allora } \dim(W) = n. \quad \square$$

(2) Costruiamo un isomorfismo di sp. vett. tra $\mathbb{R}^n$ e V

Fissiamo $t_0 \in I$.

$L: \mathbb{R}^n \rightarrow V$ è così definita: a $x_0 \in \mathbb{R}^n$ associo

l'unica sol. globale di

$$\begin{cases} \underline{x}'(t) = A(t) \cdot \underline{x}(t) \\ \underline{x}(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Dimostriamo che L è lineare.

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. $L(\alpha \underline{x}_0)$ è soluzione di:

$$\begin{cases} \underline{x}' = A \underline{x} \\ \underline{x}(t_0) = \alpha \underline{x}_0 \end{cases}$$

Ma se $L(\underline{x}_0) = \underline{w}$, allora
moltiplico per α e applico prop. derivata

$$\begin{cases} \underline{w}' = A \underline{w} \\ \underline{w}(t_0) = \underline{x}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\alpha \underline{w})' = A(\alpha \underline{w}) \\ \alpha \underline{w}(t_0) = \alpha \underline{x}_0 \end{cases}$$

Quindi $\alpha \underline{w}$ risolve

$$\begin{cases} \underline{x}' = A \underline{x} \\ \underline{x}(t_0) = \alpha \underline{x}_0 \end{cases}$$

Quindi $L(\alpha \underline{x}_0) = \alpha L(\underline{x}_0)$

Dimostriamo ora che, $\forall \underline{x}_0, \underline{y}_0 \in \mathbb{R}^n$, e'

$$L(\underline{x}_0 + \underline{y}_0) = L(\underline{x}_0) + L(\underline{y}_0)$$

$$\begin{cases} \underline{x}_1'(t) = A(t) \underline{x}_1(t) \\ \underline{x}_1(t_0) = \underline{x}_0 \end{cases} \quad \begin{cases} \underline{x}_2'(t) = A(t) \underline{x}_2(t) \\ \underline{x}_2(t_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

$$\underline{x}_1^{(t)} = L(\underline{x}_0), \quad \underline{x}_2^{(t)} = L(\underline{y}_0)$$

Allora

$$\begin{cases} (\underline{x}_1(t) + \underline{x}_2(t))' = A(\underline{x}_1(t) + \underline{x}_2(t)) \\ \underline{x}_1(t_0) + \underline{x}_2(t_0) = \underline{x}_0 + \underline{y}_0 \end{cases}$$

Allora $(\underline{x}_1 + \underline{x}_2)(t)$ è soluzione di:

$$\begin{cases} \underline{x}'(t) = A \underline{x}(t) \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 + \underline{y}_0 \end{cases}$$

Quindi $L(\underline{x}_0 + \underline{y}_0) = L(\underline{x}_0) + L(\underline{y}_0)$

Per verificare che è un isomorfismo, serve essere invertibile.

Dim che L è suriettiva.

Sia $\underline{w} \in V$, allora $\underline{w}' = A \underline{w}$

Quindi $L(\underline{w}(t_0)) = \underline{w}$

Dim che L è iniettiva

Supponiamo che $\underline{x}_0 \neq \underline{y}_0$ e

$$L(\underline{x}_0) = \underline{x}_1(t) = \underline{x}_2(t) = L(\underline{y}_0)$$

Ma $\underline{x}_0 = \underline{x}_2(t_0) = \underline{x}_1(t_0) = \underline{y}_0$, Quindi

$$\underline{x}_0 = \underline{y}_0, \text{ assurdo}$$

COLLAPIO

Siano $a_j: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $0 \leq j \leq n-1$.

Allora l'insieme delle soluzioni
di $\underline{y}^{(n)}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) \underline{v}^{(j)}(t)$ è uno

spazio vettoriale di dimensione n $\square$

COLLAUDO

Sia A continua, $\underline{f}$ continua, Allora
l'insieme $\mathcal{A}$ delle soluzioni di

$(*) \underline{x}'(t) = A(t) \underline{x}(t) + \underline{f}$ è uno spazio

affine di dimensione n , infatti

data $\underline{w}$ una soluzione di $(*)$, e posto

V lo spazio vettoriale di dimensione n

delle soluzioni di $\underline{y}'(t) = A(t) \underline{y}(t)$, eq. omog. associata

$$W = \left\{ \underline{v} \in C^1(I) : \underline{v} = \underbrace{\underline{w}}_{\text{sol. fissata}} + \underline{v}, \underline{v} \in V \right\} \quad \square$$

$$y''(t) = -y(t) + t$$

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$v'' + v = 0$$

$\sin(t)$, $\cos(t)$ sono soluzioni, e sono L.I.N. W.D.P.

$$v(t) = \alpha \sin t + \beta \cos t$$

generica soluzione
hom.

$$w(t) = \alpha \sin t + \beta \cos t + t$$

ora trovare α e β che soddisfano le condizioni del sistema

$$\begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha + 1 = 0 \end{cases}$$

$$w'(t) = \alpha \cos t - \beta \sin t + 1$$

3 passi = ① scegliere

② soluzione generale

③ trovare parametri imponendo le condizioni iniziali (se problema di Cauchy)

$$y^{(n)}(t) = \sum_{j=k}^{n-1} a_j(t) y^{(j)}(t) + h(t) \quad \text{con } k > 0$$

$$z(t) = y^{(k)}(t)$$

derivare la serie n-1 ma,
senza derivare n-k volte

$$z^{(n-k)}(t) = \sum_{j=k}^{n-1} a_j(t) z^{(j-k)}(t) + h(t)$$

$$j-k = l$$

alpo k a tutti gli indici, us l

$$z^{(n-k)}(t) + \sum_{l=0}^{n-1-k} a_{l+k}(t) z^{(l)}(t) + h(t)$$

$$b_l(t) = a_{l+k}(t)$$

$$z^{(n-k)}(t) = \sum_{l=0}^{n-k-1} b_l(t) z^{(l)}(t) + h(t)$$

Es.

$$y''' + y' = t$$

$$y' = z$$

$$z'' + z = t \quad z(t) = \alpha \sin t + \beta \cos t + t$$

$$y'(t) = \alpha \sin t + \beta \cos t + t$$

integrare...

$$y(t) = \gamma - \alpha \cos t + \beta \sin t + \frac{t^2}{2}$$

costante arbitraria

$$y^{(n)}(t) = 0$$

Seo fall: i polinomi di grado 1

$$y(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j t^j +$$

$$\frac{\alpha}{n!} t^n$$

monomio che derivato
n volte, mi da 0