

Def

Sia $n \geq 1$ un numero naturale. Siano
 $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una
funzione continua. Allora si chiama

$$v^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j v^{(j)}(t) = f(t)$$

eq. diff. ordinaria di ordine n a c.c.c.
coeff. costanti

Si osserva che la Def. si può banalmente
porre in forma normale e che soddisfa le ipos.

Prop 10

$\forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall v_0, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} v^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j v^{(j)}(t) = f(t) \\ \vdots \\ v^{(n-1)}(t_0) = v_{n-1} \end{cases}$$

esiste una e una sola soluzione globale con
intervallo massimo Dom a t_0 e v_0

Prop. 11.

Siano $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. $n \geq 1$ n° naturale

Sia $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$.

Polinomio nei complessi. Allora p

ammette radici $z_1, \dots, z_s$ radici complesse

a due a due distinte, $1 \leq s \leq n$.

Tali che $p(z) = (z - z_1)^{m_1} \dots (z - z_s)^{m_s}$,

$m_1, m_s \geq 1$ numeri naturali.

Si dice molteplicità delle rispettive

radici, e tali che $\sum_{k=1}^s m_s = n$. da Teo
Fund. Algebra.

$p(z)$ ammette in $\mathbb{C}$ n radici

complesse differenti, la contare con la

propria molteplicità.

Insomma, poiché n coeff sono reali,

Se z_i è radice di $p(z)$, allora anche

il suo coniugato $\bar{z}_i$ è e la
sua molteplicità è eguale a quella di $\bar{z}_i$.

Si presentano 3 casi.

1) Tutte le radici sono reali, e quindi:

$$p(z) = \prod_{i=1}^s (z - z_i)^{m_i}$$

2) Tutte le radici sono complesse, a
parte immag. non nulla (in questo caso
n necessariamente pari). Allora

$$p(z) = \prod_{1 \leq k \leq s} \left[(z - z_k) \cdot (z - \bar{z}_k) \right]^{m_k} =$$

$\text{Im}(z_k) > 0$

$$= \prod_{\substack{1 \leq k \leq s \\ \text{Im}(z_k) > 0}} \left[z^2 - 2\alpha_k z + (\alpha_k^2 + w_k^2) \right]^{m_k},$$

dove $z_k = \alpha_k + w_k i$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, $w_k \in \mathbb{R}$

3) Esiste almeno una radice Reale,
in tal caso:

$$p(z) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq s \\ z_k \in \mathbb{R}}} (z - z_k)^{m_k} \cdot \prod_{\substack{1 \leq j \leq s \\ \operatorname{Im}(z_j) > 0}} [z^2 - 2\alpha_j z + (\alpha_j^2 + w_j^2)]^{m_j}$$

radici reali radici complesse.

Dim segue dal Teo fund. Algebra

OSS.

Si noti che non è possibile ottenere altrimenti il grado dei polinomi fattori mantenendo i polinomi fattori a coeff. real.

Questa fatt. è univoca.

OSS.

i) se vale 1) allora $\sum_{i=1}^s m_i = n;$

ii) se vale 2) allora $\sum_{\substack{1 \leq k \leq s \\ \operatorname{Im}(z_k) > 0}} 2m_k = n;$ ho accoppiato radice con suo coniugato

iii) se vale 3) $\sum m_k + \sum 2m_j > n$

Caso omogeneo per eq. diff. lineari
a coeff. omogenee.

oss. l'insieme di soluzioni è uno spazio
vettoriale di dim n , si procede
sempre allo stesso modo.

1) Studio caso generale, trova spazio sol.

2) Studio caso particolare non generale
trova sol. particolare.

3) Se si Cauchy, sistema iperomero
le condizioni "iniciali".

Occupiamoci di eq. lineari a coeff.

cost. omogenei, ovvero nella Def.

precedente $f \equiv 0$.

Def. Sia $m \in C^\infty(\mathbb{R})$, cioè
funzione $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile per

ogni $n \in \mathbb{N}^*$, m volte su tutto $\mathbb{R}$

Se $j \in \mathbb{N}$, $j \neq 0$, $D^j v = v^{(j)}$

$D^0 v \stackrel{\text{def}}{=} v$.

Quindi $\forall j \in \mathbb{N}$, è ben definita

l'operazione lineare:

$$D^j: C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}), D^j(u) = u^{(j)}$$

Essa è lineare poiché...

$$(aD^j)(u) = a u^{(j)},$$

a questo punto, fissati $a_0 \dots a_k \in \mathbb{R}$,

è ben definito l'operatore

$$P = a_k D^k + a_{k-1} D^{k-1} + \dots + a_0 D^0: \\ C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$$

$$P(u) = a_k u^{(k)} + a_{k-1} u^{(k-1)} + \dots + a_0 u$$

$$\forall k \in \mathbb{N}$$

Tale operatore si chiama **operatore**

differenziale a coeff. costanti.

oss. Siano $a_0, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{R}$, sia poi

$$a_m \in \mathbb{R}, a_m \neq 0. \text{ Sia } p(z) = a_m z^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j z^j$$

$$\text{con } a_0 z^0 = a_0. \text{ Allora definiamo}$$

l'operatore differenziale associato a P , e

lo scriviamo con $p(D)$, il seguente:

$$p(D) = a_n D^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j D^j$$

o p. di K , o trivialmente K est.

Viceversa, dato un operatore diff. del tipo

$$P(D) = a_n D^n + \dots$$

corrispondenza

univoca con il polinomio associato.

OSS. 21 Comp.

Siano Q, P due op. diff. a coeff. cost.

allora $Q \circ P$ e $P \circ Q$

sono op. diff. a coeff. cost.

e $Q \circ P = P \circ Q$ - composizioni of

differenti = prodotto polinomi.

Prop. 12

Siano $p(z)$ e $q(z)$ due polinomi

a coeff. reali su $\mathbb{C}$.

Sia $v(z) = p(z) \cdot q(z)$ il loro
prodotto allora

Vi conviene

$$p \circ q = q \circ p, \text{ con } p(z) \cdot q(z) = q(z) \cdot p(z)$$

Prop. 13 Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

generalizzato, sia $g: I \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$

di classe C^∞ . Sia una

qualsiasi soluzione di

$$v^{(n)}(t) = g(t, v(t), \dots, v^{(n-1)}(t)).$$

Allora v è di classe C^∞ se risolve
alla parte interna del dominio

Corollario

Una qualsiasi soluzione (globale)
di una eq. di fl. om. lin. a coeff. cost.

e in $C^\infty(\mathbb{M})$

DSS. 22

Risolvere (e.d. c.c.) per $f \equiv 0$

equivale, posto $P = D^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j D^j$,

a risolvere $P(u) = 0$, dove

0 a secondo membro e' la f .

costantemente nullo su $\mathbb{R}$.

Se P si fattorizza per composizione

$$P = R_1 \circ \dots \circ R_r \circ C_1 \circ \dots \circ C_c,$$

dove R_i e C_j sono operat. diff.

a coeff. costant. $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq c$, dove

poniamo $V_i = \{v: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M} : v \text{ risolve } M: (v) = 0\}$

$W_j = \{w: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M} : w \text{ risolve } C_j(w) = 0\}$
sono vettori $\left\{ \begin{array}{l} \text{stesse soluzioni} \\ \text{di un fda di } C^m \end{array} \right.$

$$U = \{u: \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M} : u \text{ risolve } P(u) = 0\}$$

$$(f_i) \quad U \supseteq V_1 + V_2 + \dots + V_r + W_1 + \dots + W_c.$$

Spostando i vettori di un qualche
 vettore di V_1 con qualche vettore di V_2 ecc.
 non sappiamo se è una somma diretta.
 Se hanno come intersezione solo il v. nullo, allora
 SOMMA DIRETTA

$$(h_2) \quad U = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_r \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_s$$

e $n = \dim(U) = \sum_{i=1}^r \dim(V_i) + \sum \dim(W_j)$

L'idea è quella di Bruvoro,
 dato un polinomio p di $\mathbb{C}[x]$ a c.c.
 una decomposizione in somma diretta
 dei suoi sottospazi, ci serviranno
stella barbirato. Si un polinomio a coeff.
reali dato dalla Prop. 11, che
 risulta vincente

Prop. 14.1. Sia T operatore di $\mathbb{C}^n$
 a c.c. del tipo $(D - a \cdot i)^m$, $a \in \mathbb{R}$
 $m \geq 1$
 Allora una BASE per $V = \{v : P(v) = 0\}$ è

Alora da

$$\{ \exp(\alpha t), t \exp(\alpha t), \dots, t^{m-1} \exp(\alpha t) \} = B_{\alpha, m}$$

Prop. 14.2.

$$\text{Se } P = [D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \omega^2) \cdot id]^m, \quad \begin{matrix} \omega \neq 0, \\ m \geq 1 \\ \text{naturale} \end{matrix}$$

$$\{ \exp(\alpha t) \cos(\omega t), t \exp(\alpha t) \cos(\omega t), \dots, \\ t^{m-1} \exp(\alpha t) \cos(\omega t), \exp(\alpha t) \sin(\omega t), \\ t \exp(\alpha t) \sin(\omega t), \dots, t^{m-1} \exp(\alpha t) \sin(\omega t) \}$$

$$= B_{\alpha, \omega}$$

costruisce una base per

$$W = \{ w : P(w) = 0 \}$$

Prop. 15.

$$1) \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \omega \neq 0, \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

B_{α} e $B_{\alpha, \omega}$ sono linearmente indipendenti.

$$2) \text{ Se } \alpha_1 \neq \alpha_2, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \text{ allora } B_{\alpha_1} \text{ e } B_{\alpha_2} \text{ sono lin. indep.}$$

3) Se $\alpha_1, \omega, \alpha_2, \omega_2 \in \mathbb{R}$, $\omega_1, \omega_2 \neq 0$.

Supponiamo che $\alpha_1 \neq \alpha_2$, oppure $\omega_1 \neq \pm \omega_2$

le basi sono linearmente indipendenti.

Siamo in grado di costruire una base per
la (e l.c.c.), quindi data

la seguente

$$v^{(m)}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} a_j v^{(j)}(t) = 0$$

descriviamo i termini di oper. diff. lineari

a termini costruiti, prendo

$$p(z) = z^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j z^j, \text{ il polin.}$$

caratteristico

$$p(D) = D^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j D^j$$

l'eq. si scrive, prendo $P = p(D)$

$$P(u) = 0$$

Allora, Prop. 16.

Una base veff. dello sp delle
soluzioni di $U^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j U^{(j)}(t) = 0$

Si costruisce cos'.

1) per ogni radice reale r_i di $p(z) =$
 $p(z) = z^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j$ mettiamo la

sotto base, al posto di m_i la molteplicità
di r_i , B_{r_i, m_i} , come sta Prop 14.1.
La cardinal. di esso è m_i .

(i) Per ogni coppia di radici complesse
coniugate, z_j e $\bar{z}_j$ ($\text{Im} \neq 0$) e
molteplicità m_j , con $z_j = \alpha_j + i\omega_j$,
prendiamo la sotto base B_{α_j, ω_j}
la sua card. è $2m_j$

(ii) unione al variare delle radici R e coppia di radici C coniugate, tutte le possibili soluzioni.

Tale unione costruisce una base per le sol. di $\bigcup^{(n)} (t) + \sum_{j=0}^{n-1} \dots$

Posso trovare una base per l'insieme delle sol. di eq. diff. lin. ...

1) costruire pol. caratteristico

1) trovare le radici coniugate e complesse, costruendo la moltiplicazione.

A base reale e coppia di complesse, ed esse esistono in modo univoco e stabile. Se posso scomporre il

polinomio caratteristico, ho un'idea -