

$$a + b \in \mathbb{R}$$

$$y''(t) + b y'(t) + a y(t) = 0$$

$$P = D^2 + bD + a \text{ id}$$

$$P(y) = 0$$

$$p(z) = z^2 + bz + c$$

1) p ha 2 soluzioni reali

2) p ha 2 soluzioni complesse coniugate con parte immag. $\neq 0$.

1.) $r_1 \neq r_2$ con $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$

base: $\exp(r_1 t), \exp(r_2 t)$

// es. $y'' - y = 0$

$$\begin{matrix} z^2 - 1 \\ r_1 = 1 \\ r_2 = -1 \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} z^2 - 1 \\ r_1 = 1 \\ r_2 = -1 \end{matrix}} \right\} \Rightarrow e^t, e^{-t}$$

base per lo spazio delle soluzioni

1.) $r \in \mathbb{R}$ con molteplicità 2

base: $\exp(r^+), \in \exp(r^+)$

2) $z_1 = \alpha + \omega i, z_2 = \alpha - \omega i$, com $\omega \neq 0$

base = $\exp(\alpha t) \cdot \cos(\omega t)$
 $\exp(\alpha t) \cdot \sin(\omega t)$

// caso delle oscillazioni armoniche $y'' + \omega^2 y = 0$
 oscillatore armonico.

$p(z) = z^2 + 1$

$z_1 = i, z_2 = -i$

$y'' + y = f$

$y'' + y = e^t$

sol. particolare $k \cdot e^t$

$k e^t + k e^t = e^t$

$(k+k) e^t = e^t$

$k+k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$

$y'' + y = e^t$, cerchiamo soluzione fissa

soluzione generale con sol. partic. $k_1 e^t + k_2 e^t$

$$y'' + y = 5$$

scrivete mi i casi e le G.D.

$$\bar{y}(t) = 5$$

soluz. particolare

$$\bar{y} = \frac{-5}{7}$$

è possibile trovare soluzioni particolari a vista, sperando nella buona sorte.

$$y'' + y = t^n$$

- caso $n=2$, $y'' + y = t^2$

proviamo come soluzione

$$\bar{y}(t) = at^2 + bt + c$$

$$2a + at^2 + c = t^2$$

$$a=1, b=0, 2a+c=0$$

identificare dei polinomi.

$$y'' + y = \arctan t$$

buona fortuna ad occhio...

$$y'' + y = \sin t$$

$\sin t$ risolvo anche l'omogenea, e spero nelle soluzioni.

$a \sin t + b \cos t$ non funziona. Bisogna giungere tardi.

OSS

Sia f di classe $C^n(\mathbb{R})$, P operatore differenziale a coeff. costanti di ordine $n \geq 1$.

Se $u \in C^n$ risolve $P(u) = f$, e se

$Q(f) = 0$, dove Q è un operatore differenziale a coeff. costanti, allora

$$(Q \circ P)(u) = Q(f) = 0 \quad \square$$

Intuitivo, ora vivo nel mondo delle eq. omogenee.
Intuitivo, l'operatore $(Q \circ P)$ è di ordine $n+m$

Es. $y'' + y = \sin t$

$$P = D^2 + \text{id}, \quad P = Q$$

$$Q = D^2 + \text{id}$$

$$Q(\sin t) = 0$$

$$P(y(t)) = \sin t$$

$$Q \circ P(y(t)) = Q(\sin t) = 0$$

$$p(z) = q(z) = z^2 + 1$$

$$p(z) \cdot q(z) = (z^2 + 1)^2$$

$$p \circ q = 1^4 + 2 \cdot 1^2 + 1 \cdot 1$$

cerchiamo soluzione generale.

Le radici sono $\pm i$ con molteplicità 2.

Sol. particolare una' questa forma =

$$= \cancel{a_1 \sin t} + a_2 t \sin t + \cancel{b_1 \cos t} + b_2 t \cos t$$

devo cercare una soluzione che risolve l'eq. con l'operatore $Q \circ p$, dove Q mi annulla il termine noto.

La teoria mi dice che se una coppia a, b esiste, ora trovo a, b .

$$(a t \sin t + b t \cos t)'' + (a t \sin t + b t \cos t) = \sin t$$

$$(a \sin t + a t \cos t + b \cos t - b t \sin t)' + (a t \sin t + b t \cos t) = \sin t$$

vediamo.

} ho derivato la volta

$$(\underbrace{a \cos t + a \cos t}_{\text{green}} - \underbrace{a t \sin t}_{\text{green}} - b \sin t - b \sin t - \underbrace{b t \cos t}_{\text{green}}) + (\underbrace{a t \sin t}_{\text{green}} + \underbrace{b t \cos t}_{\text{green}}) = \sin t$$

ora raccogliamo

$$2a \cos t - 2b \sin t = \sin t$$

$$2a = 0$$

$$-2b = 1$$

perché coeff
di $\sin$ e $\cos$ sono
entrati uguali tra loro

$$\bar{y}(t) = -\frac{1}{2} t \cos t$$

$$(\mathbb{D}^2 + \text{id})^2 = \mathbb{D}^4 + 2\mathbb{D}^2 + \text{id}$$

$$y'' - y = t e^t \quad (\mathbb{D} - \text{id})^2 (t e^t) = 0$$

Provare a risolvere usando tecnica
annichilatore

$$y'' + y = t$$

$$Q = \mathbb{D}^2$$

è identica annichilata da questa

$$\bar{y} = t$$

1 - trovare gli Differenziali

$$\mathbb{R}^n, n \geq 1$$

Def. (Spazio duale di $\mathbb{R}^n$)

Si dice Spazio duale di $\mathbb{R}^n$ lo

spazio vettoriale delle sue

applicazioni lineari $l: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Lo si denota con $(\mathbb{R}^n)^*$ oppure

con $(\mathbb{R}^n)'$ $\square$ l'insieme delle applic. lineari che moltiplicano $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$

Sia in $\mathbb{R}^n$ fissata la base canonica

$$\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \hat{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

OSS.

Una volta fissata la base in $\mathbb{R}^n$, e noi

prendiamo la base canonica, per ogni $l: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

lineare, esiste ed è unico $\underline{v}_l$ vettore

riga (matrice rappresent. dell'applic. lineare $1 \times n$)

$$\underline{v}_e = (v_e^{(1)}, \dots, v_e^{(n)}) \rightarrow \text{indice.}$$

t.c.

(indice) $v_e^{(j)}$

Prodotto scalare

$$l(w) = \underline{v}_e \cdot \underline{w} = (\underline{v}_e, \underline{w}) =$$

$$= \sum_{j=1}^n v_e^{(j)} \cdot w_j \quad \square$$

OSS.

$$(\mathbb{R}^n)^* \xleftrightarrow{*} \mathbb{R}^n$$

È UN ISOMORFISMO LINEARE

$$l \mapsto \underline{v}_e$$

tra spazi vettoriali,
in particolare

$(\mathbb{R}^n)^*$ è uno sp. vettoriale di
dimensione n (perché isomorfo
a $\mathbb{R}^n$)

Indicando con $\phi_{x_i} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, per $1 \leq i \leq n$

$$(\phi_{x_i})(\hat{e}_j) = \delta_{ij}, \text{ con } 1 \leq j \leq n.$$

Allora $\{\phi_{x_i}\}_{1 \leq i \leq n}$ è una base per $(\mathbb{R}^n)^*$ $\square$

applic. lineari, vale 1 se - , vale 0 altrimenti.

versione che rappresenta l'applic. lineare

$$V_{\phi_{x_1}} = (1, 0, \dots, 0)$$

$$V_{\phi_{x_2}} = (0, 1, \dots, 0)$$

$\vdots$

formano base per vettori
riga $\mathbb{R}^n$. Essendo
isomorfi sub, formano
una base anche per $(\mathbb{R}^n)^*$.

Isomorfismo naturale tra vettore riga e vettori colonna

Isomorfismo naturale tra vettori $\mathbb{R}^n$ e vettore riga.

Chiusi

$$l = \sum_{i=1}^n v_e^{(i)} dx_i \quad \square$$

$$\mathbb{R}^2 \quad l: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$l\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \alpha x_1 + \beta x_2 \quad \underline{v}_e = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix},$$

$$dx_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(dx_1) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \quad (dx_2) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_2$$

$$l\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \alpha dx_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \beta dx_2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha a_1 + \beta a_2$$

dx_1 prende valore sulla 1^a componente

dx_2 prende valore sulla 2^a componente

Def. (1-hene di stifferendi).

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto.

Una funzione $w: A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ si

dice 1-stifferendi.

Quindi $w(x) = \sum_{i=1}^n \underbrace{w_i(x)}_{\text{questo coeff. continua, si moltiplica per } x} x_i$ $\square$

OSS. Se le w_i sono di classe C^k , allora diremo che w è di classe C^k .

Def.

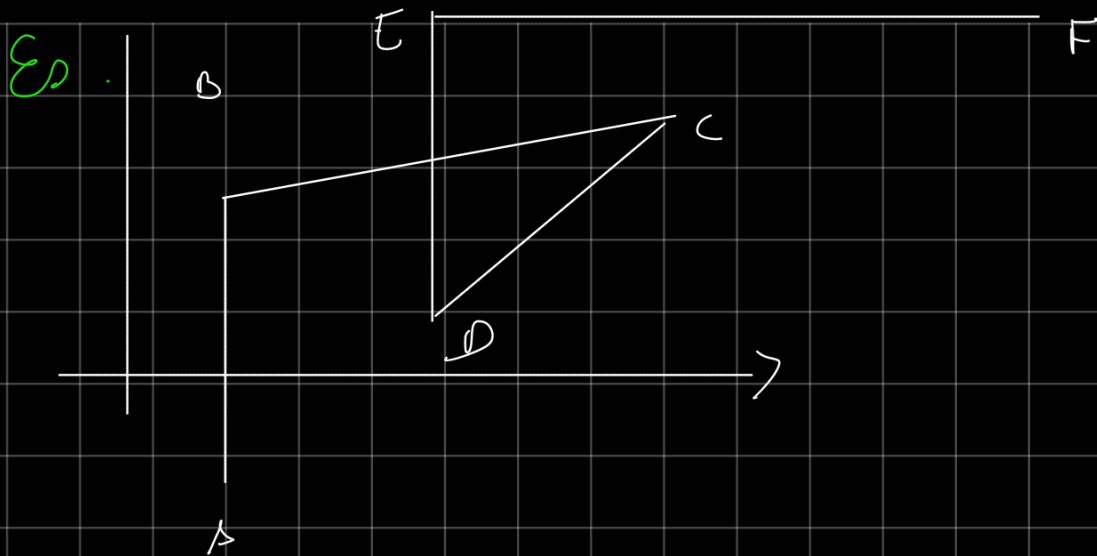
Sia $k \geq 0$ n° naturale. Una curva

$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice C^k a tratti

è continua e se esiste una suddivisione

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ di $[a, b]$

per cui $\gamma|_{[x_i, x_{i+1}]}$ è di classe C^k $\square$



$$[0, 1]$$

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < 1$$

$$\varphi|_{[x_0, x_1]}, \quad \varphi|_{[x_1, x_2]} \dots$$

Curva de nome o di classe C^1 (civetta grigie),

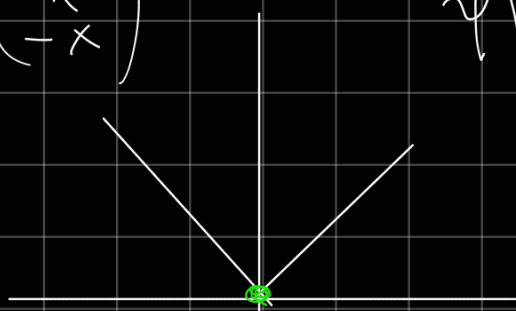
ma è di C^1 a bordo.

$$\text{Es. } \varphi: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} x \\ |x| \end{pmatrix} \quad -1 = x_0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$

$$\varphi|_{[-1, 0]}(x) = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$$

$$\varphi|_{[0, 1]}(x) = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$$



possibile di derivabilità

Def. Siano $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\gamma_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

due curve. Esse si dicono

Equivalenti se esiste un diffeomorfismo

di classe C^1 $p: [a, b] \rightarrow [c, d] \text{ t.c.}$

$$\gamma_1 = \gamma_2 \circ p \quad \square$$

oss.

Se γ_1 e γ_2 sono equivalenti, allora

$$\gamma_1 \circ p^{-1} = \gamma_2 \quad \square$$

oss.

Sia $X: \{ \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, a < b \}$

la relazione su X :

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \Leftrightarrow \gamma_1 \text{ è equivalente a } \gamma_2.$$

è una relazione di equivalenza.

Le proprietà Simmetrica, Transitiva.

$$\varphi_1 \sim \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1 = \varphi_2 \circ \rho$$

$$\varphi_2 \sim \varphi_3 \Leftrightarrow \varphi_2 = \varphi_3 \circ \tilde{\rho}$$



$$\varphi_1 = \varphi_2 \circ \rho = (\varphi_3 \circ \tilde{\rho}) \circ \rho =$$

$$= \varphi_3 \circ (\tilde{\rho} \circ \rho)$$

Def

Siano $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tilde{\varphi}: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$

equivalenti. Esse si dicono avere la

stessa orientazione se $\rho' > 0$ □

Es.

$$\varphi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\vartheta \rightarrow \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix}$$

parametrismo della
circonferenza, in senso
antiorario, al crescere di ϑ .

$$\psi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\vartheta \rightarrow \begin{pmatrix} -\cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}$$

percorso in senso
orario

2 curve con orientazione opposta

$$\tilde{\gamma}: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$v \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(2v) \\ \sin(2v) \end{pmatrix}$$

la per come più
velocemente!

Def.

Sia A aperto non vuoto di $\mathbb{R}^n$.

Sia $\omega: A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ una 1-differenziale continuo

$$\omega(x) = \sum_{j=1}^n \omega_j(x) \circ dx_j,$$

Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ una curva C^1 a tratti.

Definiamo l'integrale di ω lungo

γ nel seguente modo.

Prendi una qualsiasi suddivisione

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b \quad \text{per cui}$$

$$\gamma|_{[x_i, x_{i+1}]} \text{ è } C^1, \quad 0 \leq i \leq m-1,$$

$$\int_{\gamma} \omega = \sum_{i=1}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega_j(\gamma(t)) \cdot \gamma'_j(t) dt$$

□

NOT

$$d\varphi_j = \varphi_j' dt,$$

also

$$\int_{\varphi} \omega = \sum_{i=1}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \underbrace{\omega(\varphi(t)) d\varphi_i(t)}_{\text{e ben definiert.}}$$