

Conversione

$$\varphi: [0, 2\pi] \rightarrow (\cos \vartheta, \sin \vartheta)^T$$

$$\varphi: [0, 2\pi] \rightarrow (-\cos \vartheta, -\sin \vartheta)^T$$

$$\tilde{\varphi}(\vartheta) = \varphi(\vartheta + \pi)$$

hanno stessa orientazione!

$$\varphi = \varphi(-\vartheta)$$

orientaz. opposta, invertita

$$X: \{ \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \varphi \text{ continua} \}$$

$$\varphi \simeq \psi \stackrel{\text{def}}{\iff} \varphi \text{ e } \psi \text{ hanno la stessa}$$

orientazione.

qui raffinata relazione di equiv.

$$X / \simeq$$

$[\varphi]$ si chiama cammino orientato

Prop.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto. Sia

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i \quad 1\text{-forma diff. continua}$$

Sia $\gamma \in [\gamma]$, Allora,

$$\int_{\gamma} w = \int_{\gamma} w. \quad \square$$

Dim (nel caso in cui $\gamma \in C^1$)

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

quindi si consideri γ un'isoperimetro di classe C^1

$$\gamma: \gamma \circ \rho, \quad \rho \text{ diffeomorfismo di classe } C^1,$$

$$\text{tali che } \rho' > 0.$$

$$\rho \text{ manda } \alpha \text{ in } a \\ \text{e } \beta \text{ in } b$$

$$\gamma(a) = \gamma \circ \rho(a) = \gamma(a)$$

$$\gamma(b) = \gamma \circ \rho(\beta) = \gamma(\beta)$$

Se si inverte, invece,
può essere a in α
e b in β .

$$\int_{\gamma} w = \int_a^b \sum_{i=1}^n a_i(\gamma(t)) \gamma'_i(t) dt =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{i=1}^n a_i(\gamma(z)) \cdot \gamma'_i(z) dz$$

quello che vogliamo dimostrare

ovvero variabili dove $z = \rho(t)$

$$\int_a^b a_i(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)) \cdot \gamma'_i(t) dt$$

dir. solo da t , applico cambiamento di var. utilizzando
 voglio passare da t a z

$$dz = p'(t) dt$$

$$t = p^{-1}(z) \quad \psi'(z) dz$$

$$\frac{dz}{p'(t)} = \frac{dz}{p'(t)} = p^{-1}$$

$$\psi(z) = \psi \circ p^{-1}(z)$$

$$\psi'(z) = \psi'(p^{-1}(z)) \cdot (p^{-1}(z))' =$$

$$\psi'(p^{-1}(z)) \cdot \frac{1}{p'(p^{-1}(z))}$$

si può dire $dz = \frac{dz}{p'(t)}$

$$p(b) = \beta$$

$$= \int_a^{\beta} \alpha(\psi(z)) \psi'(z) dz$$

$$p(a) = \alpha$$

Se orientato su intervallo

$$\int_a^b = b - a$$

e l'intervallo diretto
negativo

cambiamento di variabile

$$\omega = A \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$$

Def. Sia $\omega = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i$ continue

Esista $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto non vuoto,

$f \in C^1(A)$ e tale che

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{Allora si dice che}$$

ω è **esatta** (oppure che è un **differenziale esatto**); f è detta

una primitiva di ω . $\square$ perché se

f può assumere una costante, nella derivata parziale si annulla.

$$\omega = df := \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Le forme esatte, integrali lungo cammini equivalenti, dipendono solo dell'inizio e della fine.

Prop.

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 .

Se $\omega = df$, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1

o **traffo**, sia $\gamma(a) = \underline{x_1}$,

$\gamma(b) = \underline{x_2}$. Allora $\int_{\gamma} \omega = f(\underline{x_2}) - f(\underline{x_1})$

Dim.

$$h \circ \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (h \circ \gamma)(t) &= \nabla h(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t) \end{aligned}$$

Allora

$$\int_a^b \frac{d}{dt} (h \circ \gamma)(t) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t) dt$$

Quindi dal 1°o passo del calc. integrale.

$$\begin{aligned} h(\gamma(b)) - h(\gamma(a)) &= \int_a^b w \\ \text{"} & \\ h(\underline{x}_2) - h(\underline{x}_1) &= \int_{\gamma} w \end{aligned}$$

Condizione

Sia γ chiusa ($\gamma(a) = \gamma(b)$).

Allora se w è esatta,

$$\int_{\gamma} \omega = 0.$$

Def. Un insieme $B \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto si dice **connesso per archi** se $\forall x_1, x_2 \in B$, esiste una curva continua $\gamma: [a, b] \rightarrow B$ t. c. $\gamma(a) = x_1, \gamma(b) = x_2$. $\square$

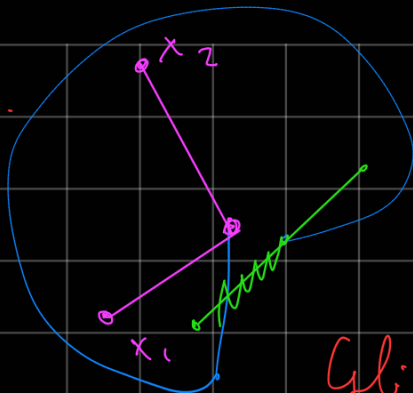
Esempio 1

I convessi non vuoti sono tutti connessi per archi. $\square$

Def.

Un insieme $B \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **stretto** se $\exists \bar{x} \in B$ per cui $\forall y \in B$, il segmento che ha estremi $\bar{x}$ e y appartiene a B . $\square$

oss.



Stellato, ma non

convesso, per lo

Gli stellati sono convessi per archi

Prop.

Sia A aperto non vuoto e convesso per archi. Allora ω di classe C^0 è esatta

se e solo se $\forall \gamma, \gamma' \text{ t.c. } \gamma(a) = \gamma'(a)$

e $\gamma(b) = \gamma'(b)$, C' a tratti, e'

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma'} \omega \quad \square$$

integrale indipend.
dal percorso.

Def.

$$\text{Sia } \omega^{(x)} = \sum_{i=1}^m a_i(x) dx_i,$$

$\omega: A \rightarrow (\mathbb{R}^m)^*$, A aperto non vuoto

di classe C^1 .

Essa si chiama chiusa se

$$\forall i \neq j, 1 \leq i, j \leq n \quad e'$$

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \quad \square$$

QSS.

Se W è di classe C^1 ed esatta, allora
è chiusa $\square$

Dim.

$$\exists f \in C^2 \text{ t.c. } a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{perché è esatto.}$$

Teo di Schwarz

$$\Rightarrow \frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}.$$

Esempio di forma chiusa ma non esatta

$$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \quad \text{aperto connesso per arco.}$$

$$w(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

funzione dell'origine e' di classe C^∞

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = - \left[\frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x}{x^2 + y^2} \right] = \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_2} = \frac{\partial a_2}{\partial x_1}$$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)^T$$

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Se esiste, integrale
doppio per 0

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} w &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\sin t}{1} \cdot (-\sin t) + \frac{\cos t \cdot \cos t}{1} \right] dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0 \end{aligned}$$

funzione non esatta

Prop.

Sia A aperto non vuoto e stellato.

Sia $w = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i$, di classe $C^1(A)$

e chiusa. Allora w è anche esatta.

Dim.

Sia $x_0 = \bar{x}$ nella def. di stellato.

Sia $x \in A$, $\gamma: [0, 1] \rightarrow A$

$$\gamma(t) = x_0 + t(x - x_0) \quad \begin{matrix} 0 = x_0 \\ 1 = x \end{matrix}$$

Definisco

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ così:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{\gamma} w = \int_0^1 \sum_{i=1}^n a_i(\gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t) dt = \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n a_i(x_0 + t(x - x_0)) \cdot (x_i - x_{0,i}) dt \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_{0,1} + t(x_1 - x_{0,1}) \\ \vdots \\ x_{0,n} + t(x_n - x_{0,n}) \end{pmatrix}$$

↑
sintesi
che è una
primitiva.

f ben definita se vale l'eq.

Verificare che se $1 \leq h \leq n$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_h} = a_h$$

calcolo

$$\frac{\partial f}{\partial x_h} = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_h} [a_i(x_0 + t(x-x_0)) \cdot (x_i - x_{0,i})] dt$$

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto

Sia $g: [a, b] \times A \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 .

Sia $G: A \rightarrow \mathbb{R}$.

$$G(\underline{x}) = \int_a^b g(s, \underline{x}) ds$$

x fissato.

$\forall x$ posto h è ben definita

Allora G è di classe $C^1(A)$ e

$$\frac{\partial G}{\partial x_h}(\underline{x}) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial x_h}(s, \underline{x}) ds$$

derivata

funz. integranda
e poi integri.

derivata in parte

derivata prodotto

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left[t \frac{\partial}{\partial x_h} a_i(x_0 + t(x-x_0)) \cdot (x_i - x_{0,i}) + a_i(x_0 + t(x-x_0)) \cdot \frac{\partial}{\partial x_h} (x_i - x_{0,i}) \right] dt$$

$$= \int_0^1 \left\{ \sum_{i=1}^n t \frac{\partial a_i}{\partial x_i} (x_0 + t(x - x_0)) \cdot (x_1 - x_{0,i}) \right\} dt + a_i(x_0 + t(x - x_0)) \Big|_0^1$$

$t(G'(t))$

$$G(t) = a_h(x_0 + t(x - x_0))$$

$$G'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i} (x_0 + t(x - x_0)) \cdot (x_1 - x_{0,i})$$

$$(tG(t))' = G(t) + t(G'(t))$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_h}(x) = \int_0^1 (tG(t))' dt =$$

$$= G(1) = a_h(x) \quad \square$$

La chiusura per scalari più istruita,
sollito per definire bene la ∂ .

Def

Sia A spazio normato. Siano $\varphi, \psi: [a, b] \rightarrow A$
continue. Essi si dicono **omotopi** se esiste

una funzione continua $H: [0,1] \times [a,b] \rightarrow A$

o due intervalli
compatti.

f. c. $\gamma(t) = H(0, t)$

$$\gamma(t) = H(1, t)$$

□

esiste H omotopia
che fa queste cose
divergente, o lo stesso.

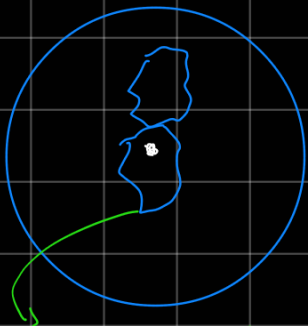
Def.

$\gamma: [a,b] \rightarrow A$ continua e' omotopa

ad un punto $\vec{c} \in A$, se γ e' omotopa alla
curva che vale identicamente $\vec{c}$. $\rightarrow$ □

Def.

A spazio si dice semplicemente connesso se
ogni curva chiusa e continua e soppressa in
 A e' omotopa a un punto (di A). □



questo non e' simplic. connesso, lo e' un punto.

gli spazi con un buco hanno il caso
altro es. con una circonferenza

questa curva non possiamo mai deformarla ad un punto.

Prop. Sia A aperto non vuoto semplicemente
connesso. Allora ω forma di Poincaré
 C' è esatta $\Leftrightarrow \omega$ di classe C' è chiusa. $\square$