

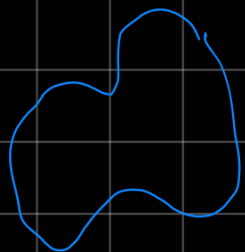
Superficie regolare in $\mathbb{R}^3$

Def 2

Sia $K \subseteq \mathbb{R}^2$ un compatto non vuoto di $\mathbb{R}^2$.
Sia K la chiusura di un aperto connesso per archi.
(K° è aperto connesso per archi e metrizzabile secondo Peano-Jordan)

Si dice Superficie Regolare di $\mathbb{R}^3$

una funzione $\psi: K \rightarrow \mathbb{R}^3$, iniettiva e t.s.



1) esiste un aperto $\Omega \supseteq K$ e

una $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 per cui

$$\psi|_K = \psi$$

2) La matrice Jacobiana di ψ , $(u, v)^T \in \mathbb{R}^2$
genera vett. di $\mathbb{R}^3$

$$J\psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial u} & \frac{\partial \psi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial u} & \frac{\partial \psi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial u} & \frac{\partial \psi_3}{\partial v} \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla \psi_1 \\ \nabla \psi_2 \\ \nabla \psi_3 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Si ha rango 2 per ogni $(u, v)^T \in K$ $\square$

Def.

Siano $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)^T$.

Il prodotto vettoriale tra $\vec{a}$ e $\vec{b}$,

denotato con $\vec{a} \times \vec{b}$ è definito così:

posto $\hat{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\hat{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

o vettore $\vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \hat{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{k} \quad \square$$

oss.

Scriviamo formalmente la matrice

$\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ Allora, sempre "formalmente",
 $\vec{a} \times \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$

= Laplas =

= $\hat{i} (a_2 b_3 - a_3 b_2) + \hat{j} (a_3 b_1 - a_1 b_3) + \hat{k} (a_1 b_2 - a_2 b_1)$ Cambi i segni

$$+ k(a_1 b_2 - a_2 b_1) \quad \square$$

OSS.

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ sono linearm. indipendenti
se e solo se $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ $\square$

$$J\psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial u} & \frac{\partial \psi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial u} & \frac{\partial \psi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial u} & \frac{\partial \psi_3}{\partial v} \end{pmatrix} \quad \psi_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial u} & \frac{\partial \psi_2}{\partial u} & \frac{\partial \psi_3}{\partial u} \end{pmatrix}^T$$

$$\psi_v = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial v} & \frac{\partial \psi_2}{\partial v} & \frac{\partial \psi_3}{\partial v} \end{pmatrix}^T$$

OSS

$$J\psi \text{ ha rango } 2 \Leftrightarrow \psi_u \times \psi_v \neq \vec{0}$$

Def. 2.

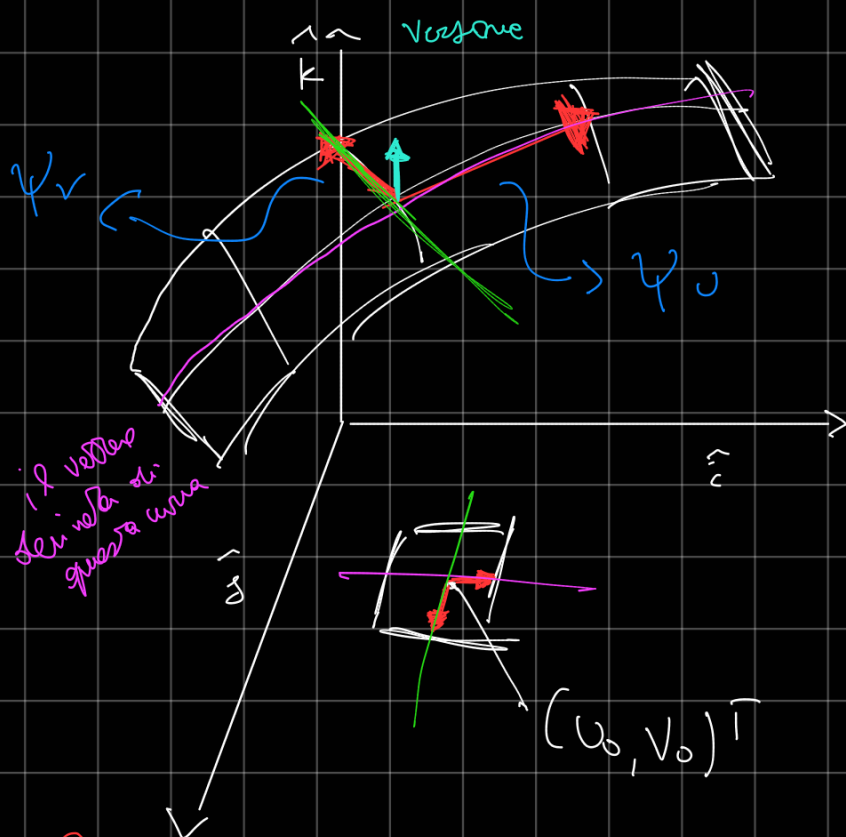
Sia $(u_0, v_0)^T \in K^0$. L_0 spazio tangente
perp. alla derivata di ψ rispetto a u

affine $\psi(u_0, v_0) + \psi_u(u_0, v_0) \cdot (u - u_0) +$
perp. alla derivata di ψ rispetto a v .

$$\psi_v(u_0, v_0) \cdot (v - v_0), \quad \forall (u, v)^T \in \mathbb{R}^2$$

traslo il piano di ciò

si dice Piano Tangente applicato alla
Superficie φ nel punto $P_0 = (u_0, v_0)^T$



Piano Tangente = Intersezione
 del piano generato da
 v_0 e v_v .

Caso 1-dimensionale.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 .

$$t \mapsto (t, f(t))^T$$

curva che ha come im. il grafico,
 derivata ecc.

$(t_0, f(t_0))^T$. la retta tangente a Γ_f in $(t_0, f(t_0))^T$ è
 esattamente $(t_0, f(t_0))^T + t(1, f'(t_0))^T$.

OSS.

$$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (\vec{a} \times \vec{b}) \perp \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

osservare $\rightarrow$
 $a \in b, a$
 $L(a, b)$

molte

$$\widehat{\gamma}_\gamma(P_0) = \frac{\varphi_u(u_0, v_0) \times \varphi_v(u_0, v_0)}{\|\varphi_u(u_0, v_0), \varphi_v(u_0, v_0)\|}$$

vetture normalizzate.

Si dice *Versione normale* a γ in P_0 $\square$

Def. 3

Siano $\varphi_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi_2: U_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con le corrispettive

$\varphi_1: U_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, e $\varphi_2: U_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ come nella

Def 1), due superfici regolari.

Essi si dicono *equivalenti* se esiste

un diffeomorfismo π di classe C^1

$\pi: U_1 \rightarrow U_2$ tale che $\varphi_1 = \varphi_2 \circ \pi$ $\square$

$$\varphi_2 = \varphi_1 \circ \pi^{-1}$$

OSS

Si verifica subito che l'essere equivalenti

è una relazione di *equivalenza* nell'insieme

stelle superfici di $\mathbb{R}^3$ $\square$

Area di una Superficie regolare

Def. 4

Sia $\gamma: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie regolare.

Definisco Area di γ il seguente

numero reale.

$$A(\gamma) = \iint_K \|\gamma_u(u,v) \times \gamma_v(u,v)\| \, du \, dv$$

$\square$

; determinanti seni

Oss. 5

Siano M_1, M_2, M_3 i Minori 2×2

della matrice $J\gamma$ ottenuti eliminando rispettivamente

la 1^a, 2^a, e la 3^a riga.

Possiamo

$$W\gamma = \|\gamma_u \times \gamma_v\|^2, \quad \text{Poi:}$$

$$\gamma_u \times \gamma_v = M_1 \hat{i} - M_2 \hat{j} + M_3 \hat{k} =$$

$$(M_1, -M_2, M_3)^T. \quad \text{Quindi}$$

$$W\psi = M_1^2 \hat{c} + M_2^2 \hat{z} + M_3^2 \hat{z}.$$

Inoltre poniamo

$$E = \|\psi_0\|^2,$$

$$G = \|\psi_0\|^2, \quad F = (u, v), \text{ allora}$$

$$W\psi = EG - F^2.$$

