

$\psi: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\psi(u, v)$ superficie regolare.

ψ_u, ψ_v .

$$\iint_{\mathbb{K}} \|\psi_u \times \psi_v\| \, du \, dv$$

$$\psi_u \times \psi_v = (M_1 \hat{i}, -M_2 \hat{j}, M_3 \hat{k})$$

$$W_\psi = \|\psi_u \times \psi_v\|^2$$

$$E = \|\psi_u\|^2, \quad G = \|\psi_v\|^2, \quad F = (\psi_u, \psi_v)$$

$$W_\psi = E \cdot G - F^2$$

$$\iint_{\mathbb{K}} \|\psi_u \times \psi_v\| \, du \, dv = \iint_{\mathbb{K}} \sqrt{W_\psi} \, du \, dv =$$

$$= \iint_{\mathbb{K}} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv$$

oss.

Se $\psi \sim \tilde{\psi}$ sono equivalenti, allora esiste

$\pi: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{H} \mid \pm c$ che è la restrizione a

$\mathbb{K}$ di $p: \Omega \rightarrow \Omega$, diffeomorfismo su clone C .

Poniamo $\pi_1(u, v) = r(u, v)$, $\pi_2(u, v) = s(u, v)$

derivazione composta

$$\begin{aligned} \psi_u \times \psi_v &= \left(\tilde{\psi}_r \frac{\partial r}{\partial u} + \tilde{\psi}_s \frac{\partial s}{\partial u} \right) \times \\ &\quad \times \left(\tilde{\psi}_r \frac{\partial r}{\partial v} + \tilde{\psi}_s \frac{\partial s}{\partial v} \right) = \\ &= \tilde{\psi}_r \times \tilde{\psi}_s \left(\frac{\partial r}{\partial u} \cdot \frac{\partial s}{\partial v} - \frac{\partial r}{\partial v} \cdot \frac{\partial s}{\partial u} \right) = \\ &= \tilde{\psi}_r \times \tilde{\psi}_s \cdot (\det(J_\pi)) = \end{aligned}$$

$$W\psi(u, v) = W\tilde{\psi}(\pi(u, v)) \cdot (\det(J_\pi))$$

valore de l'area sia invariante per superficie equivalenti.

$$A(\psi) = \int \int_K \sqrt{W\psi} \, du \, dv =$$

$$= \int \int_{\pi^{-1}(H)} \sqrt{W\tilde{\psi}(\pi(u, v))} \cdot (\det(J_\pi)) \, du \, dv =$$

$$= \int \int_H \sqrt{W\psi(r, s)} \, dr \, ds$$

area superficie indipendente dalla parametrizzazione.

Def.

Sia $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ curva di

Classe C^1 . Pongo la sua lunghezza

$$L(\gamma) := \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt =$$

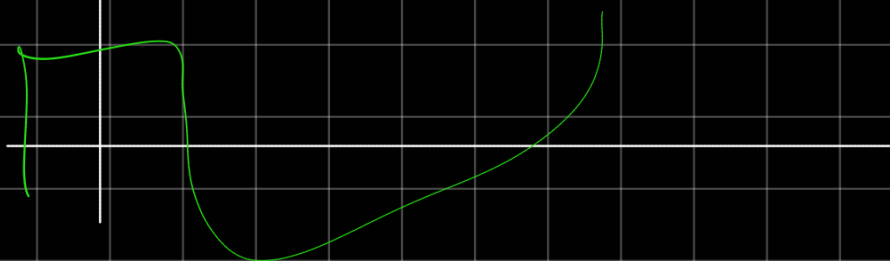
$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i'(t)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Caso γ di Classe C^1 a tratti;

Sia $\{t_j\}_{j=0}^{k-1}$, una suddivisione t.c.

$\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}$ è di Classe C^1 .

$$L(\gamma) = \sum_{j=0}^{k-1} L(\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}) \quad \square$$



Torino $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si

come C^1 .

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow (t, f(t))^T$$

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

Def.

Sia $A \subset \mathbb{R}^3$ un aperto non vuoto.

Sia $\gamma: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie regolare.

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Definiamo l'integrale di Superficie di

f su γ come:

$$\iint_K f(\gamma(u, v)) \cdot \|\gamma_u \times \gamma_v\| du dv$$

$R > 0$

parametrizza così

$$\begin{cases} x = R \cdot \sin u \cos v \\ y = R \cdot \sin u \sin v \\ z = R \cos u \end{cases}$$

$$0 \leq u \leq \pi$$

$$0 \leq v \leq 2\pi$$

$$\varphi_v = R \cdot (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0)^T$$

$$\varphi_u = R \cdot (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u)^T$$

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = R^2 \cdot \sin u \cdot (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)^T$$

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\| = R^2 \sin u \cdot (\sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \sin^2 v + \cos^2 u)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= R^2 \sin u$$

$$A(\varphi) = \iint_R R^2 \sin u \, du \, dv =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi [R^2 \sin u \, du] \, dv = R^2 \cdot 2 \cdot 2\pi =$$

$$= 4\pi R^2$$

Superficie lamina sfera

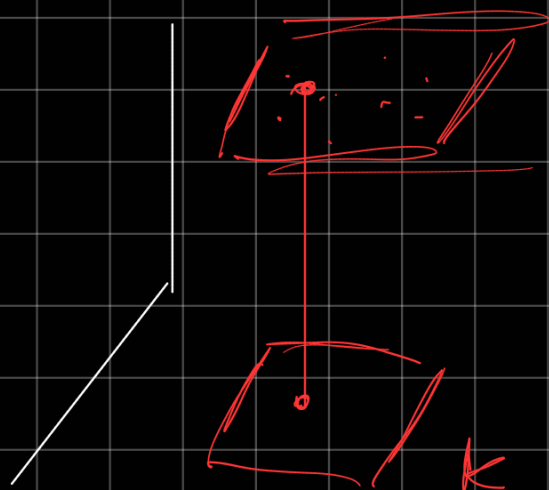
$K \subseteq \mathbb{R}^2$, compatto connesso con $\dot{K}$ per il
corno per archi.

$f: K \rightarrow \mathbb{R}$ restrizione a K di una funzione

$g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 , $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto

$$f = g|_K$$

$$F(u, v) = (u, v, f(u, v))^T$$



$$JF(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{pmatrix}$$

$$W_F = h_u^2 + h_v^2 + 1$$

$$\iint_K \sqrt{1 + h_u^2 + h_v^2} \, du \, dv$$

$$K = \{ (u, v)^T : u^2 + v^2 = R^2 \}$$

$$h(u, v) = \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}$$

quota,
usando quociente,
move parameters

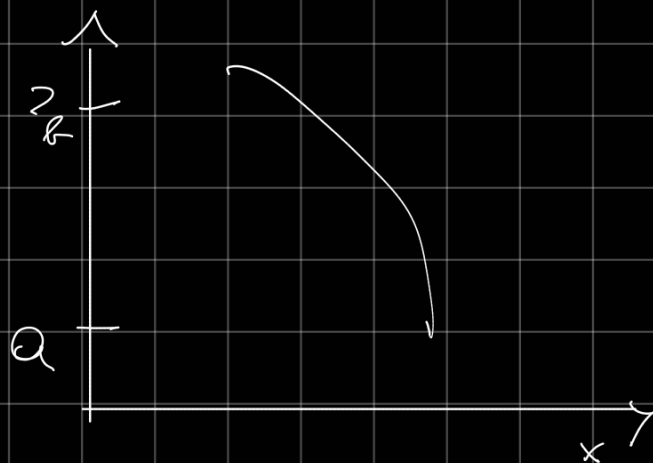
$$\iint_K \sqrt{h_u^2 + h_v^2 + 1} \, du \, dv = 2\pi R^2$$

Surface with 2 parameters. Surfaces

$$a \leq z \leq b$$

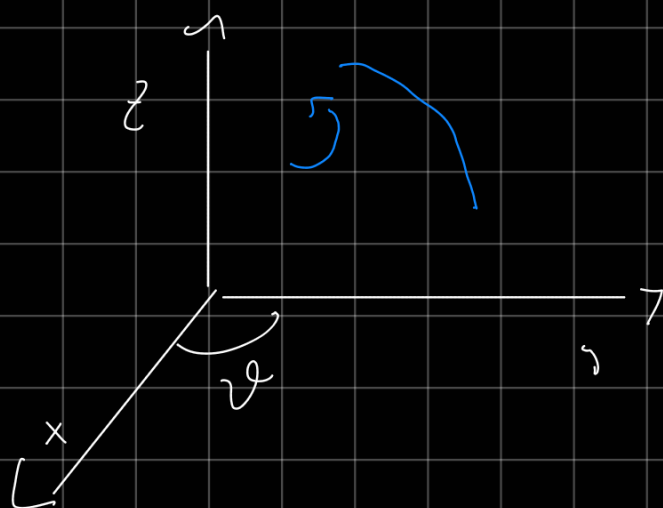
$$h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_x$$

$\uparrow$
 z



Parameters.

$$\begin{cases} x = \rho(z) \cdot \cos \vartheta \\ y = \rho(z) \cdot \sin \vartheta \\ z = z \end{cases}$$



$$a \leq z \leq b$$

$$0 \leq \vartheta \leq 2\pi$$

$$J_{\varphi} \begin{pmatrix} \rho'(z) \cdot \cos \vartheta & -\rho(z) \cdot \sin \vartheta \\ \rho'(z) \cdot \sin \vartheta & \rho(z) \cdot \cos \vartheta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A(\varphi) = 2\pi \int_a^b |\rho(z)| \cdot \sqrt{1 + \rho'(z)^2} dz$$

Def (sop. regolare e tratti)

Sia $K \subset \mathbb{R}^2$ un compatto non vuoto e
misurabile secondo Peano-Jordan.

Si chiama superficie regolare a tratti una
funzione continua di $\mathbb{R}^3$

$\gamma: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ che verifica la seguente
proprietà:

esiste un n finito di compatti

$K_1, K_2, \dots, K_m$ non vuoti, chiusi,

di un aperto connesso per archi e misurabile

secondo P-J, tali che a due a

due le loro parti interne sono

disgiunte, la cui unione $\bigcup_{i=1}^m K_i$ è uguale

a K , ed infine tale che,

$\forall 1 \leq i \leq m$ è $\forall \gamma|_{K_i}$ è superficie regolare

lo cui parametri fanno per farla

□

ogni single faccia è parametrizzata,
 peraltro per peraltro, e dove c'è il bordo comune, le
 parametrizzazioni sono ancora continue.

φ iniettiva in K , punto interno.

Da fissare la definizione di.

Superficie regolare in $\mathbb{R}^3$

non so dove
 hanno sia.

Def.

Una superficie regolare $\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ si

dice orientabile se φ è iniettiva

(su tutto K) e se φ ha rango

2 su tutto K . $\square$

DSS

$\wedge \nabla \varphi$

$$\frac{\varphi_0 \times \varphi_1}{\|\varphi_0 \times \varphi_1\|}$$

è definito su tutto K

Es.

$$\psi = \psi \circ \pi$$

$$V_\psi = \frac{\psi_v \times \psi_s}{\| \psi_v \times \psi_s \|}$$

$$\| \psi_v \times \psi_s \|$$

→ meno 0 segue 1 o -1.

$$= \frac{\det(\partial \pi)}{|\det(\partial \pi)|} \cdot \frac{\psi_u \times \psi_v}{\| \psi_u \times \psi_v \|}$$

quando riparametrizziamo, o abbiamo lo stesso orientamento, o opposto

Def.

Sia K tale da verificare le ipotesi nella def. di Superficie regolare

Sia poi ∂K unione disgiunta

di un n° finito $F_1, \dots, F_m$ di chiusi

di $\mathbb{R}^2$, uno dei quali è immagine

di una curva $\gamma_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, t.c.

$\gamma_i(a) = \gamma_i(b)$ (chiusa) e orientata

se vista, oia a (a, b) (semplice).

Sia ogni γ orientata in modo tale
da dare a ∂K l'orientazione positiva

" percorrendo il nostro
braccio sinistro che punta
verso l'interno "

orient. positiva
senso antiorario

ma se c'è un buco interno,
per avere braccio nell'interno,
devo percorrerlo in senso
orario per avere orientazione
positiva, per avere braccio su
esterno.

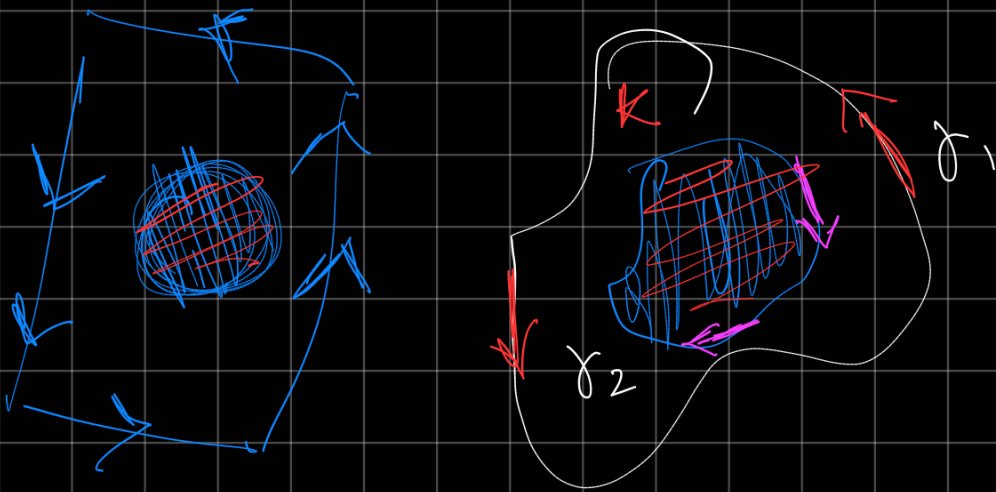
non è rigorosa
ma STILIZZATA,
NO TIME!

Sia $\eta: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ orientabile.

In tal caso diremo che η è una
superficie regolare con bordo.

$\{\eta \circ \gamma_i\}_{1 \leq i \leq n}$ si dice bordo di η .

Se $S = \text{Im}(\varphi)$, poniamo
 $\partial S^+ = \bigcup_{i=1}^n \text{Im}(\varphi \circ \gamma_i)$, enfatizzando
il fatto che su ∂K ho scelto
l'orientazione positiva $\square$



Teorema di STOKES

Sia $\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ superficie regolare
con bordo e di classe C^2 .

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto non vuoto t.c.

$A \ni S = \text{Im}(\varphi)$ e sia $F: A \rightarrow \mathbb{R}^3$
un campo vettoriale di C^1 .

Potiamo

$$\text{rot}(\vec{F}) = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \right) \hat{i} +$$

$$+ \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \right) \hat{k}$$

Allora, posto $\hat{n}$ il versore normale a γ ,

$$\iint_S (\text{rot} \vec{F}, \vec{v}) \, d\sigma = \iint_{\partial^+ S} (\vec{F}, \hat{n}) \, ds,$$

dove $\vec{T}$ è il campo tangente al

bordo di S $\square$

$$\iint_S f(x, y, z) \, d\sigma := \iint_K f(\gamma(u, v)) \cdot \|\gamma_u \times \gamma_v\| \, du \, dv$$

con questa notazione,

$$\int_{\partial S^+} g(x, y, z) \, ds := \sum_{i=1}^n \int_a^b g(\gamma_i(t)) \cdot \|\gamma_i'(t)\| \, dt$$

Def.

Un aperto non vuoto è limitato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

si dice regolare se esiste

$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 t.c.

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) < 0\},$$

$$\partial \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = 0\} \text{ e}$$

$$\text{infine } \|\nabla F\| \neq 0, \quad \forall x \in \partial \Omega$$

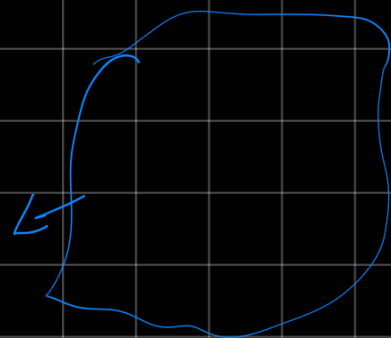
e sia Misurabile secondo P-J

oss.

Se Ω è regolare in $\mathbb{R}^3$, allora

$\partial \Omega$ è immagine di una superficie
regolare γ , t.c. $\hat{\nu} \gamma = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}$ ed
è rivolto sempre

verso l'esterno di Ω



Def.

Sia $F: \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ questo non
vuoto sottospazio derivabile (ogni componente
si può derivare)

$$\operatorname{div}(\vec{F}) := \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \quad \square$$

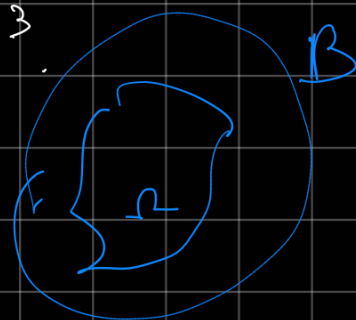
Teorema di Divergenza.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto regolare,

$\vec{F}: B \rightarrow \mathbb{R}^3$ di classe C^1 , con

$B \supseteq \Omega$, B aperto di $\mathbb{R}^3$.

Allora:



$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{F}) \, dx \, dy \, z = \iiint_{\partial \Omega} (\vec{F}, \hat{\nu}) \, d\sigma$$

dove $\hat{\nu}$ è la normale esterna a $\partial \Omega$ □