

Prop.

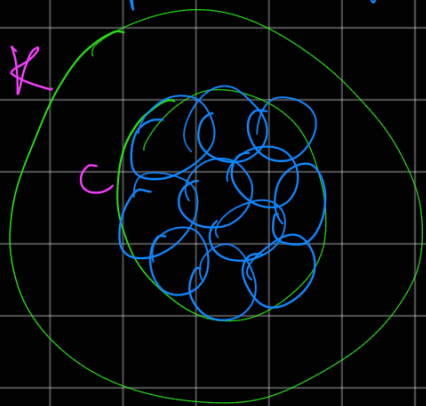
(X, τ) sp. topologico, K compatto,

$C \subseteq K$ chiuso $\Rightarrow C$ compatto
un chiuso dentro un compatto è sempre compatto.

Dim. Posso supporre che $C \subsetneq K$, e strettamente contenuto in K
mi ricopre tutto X , quindi ricoprirà anche K

Sia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ ricoprimento aperto qualsiasi di C .

$\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda} \cup \{C\}$ è un ricoprimento aperto per K



Allora posso estrarre un sottoricoprimento aperto e finito.

$A_1, \dots, A_n$ dimostreremo che è un ricoprimento per C

$\rightarrow$ ovvio perché se è un ricoprimento per K , lo è anche per C . ■

Def.

Diciamo che uno spazio topologico

(X, τ) verifica l'ipotesi (α) se
 $\forall x, y \in X \quad x \neq y$ esistono

$A, B \in \tau$, $x \in A$, $y \in B$,

$$A \cap B = \emptyset$$

per ogni coppia di el. di X ,

esiste un aperto A e un aperto B che sono
disgiunti, riesco a separare i due
punti



ipotesi di Separabilità
(forse), solo che
non se lo ricorda, l'ha
chiamata ipotesi (α) .
Amogus.

Se vale questa ipotesi... (α) verificata.

K compatto $\Rightarrow K$ chiuso.

Dim.

Dimostriamo che ∂K è aperto.
Di fatti sia $y \in \partial K$, $\forall x \in K$

$\exists A_x \in \tau$ aperto t.c. $x \in A_x$ (intorno di x ?)
e in corrispondenza un $B_x \in \tau$

con $y \in B_x$ e $A_x \cap B_x = \emptyset$

secondo (a) posso trovare due intervalli la cui intersezione è $\emptyset$ ecc...

Ora: $\{A_x\}_{x \in X}$ è un ricoprimento aperto di K .

Sia $\{D_1, \dots, D_n\}$ un suo sottoricoprimento finito, siano $x_1, \dots, x_n \in K$ t.c.

$$A_{x_1} = D_1, \dots, A_{x_n} = D_n.$$

Sia $B = \bigcap_{i=1}^n B_{x_i}$. B è aperto e

$$B \cap A_{x_i} = \emptyset \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

$$\text{Quindi } B \cap \bigcup_{i=1}^n A_{x_i} = \emptyset \Rightarrow B \cap K = \emptyset.$$

per ogni $y \in \bigcup K$ esiste un aperto che lo contiene e non appartiene a K . il $\bigcup K$ è un aperto senza (a) questo ragionamento non si può fare.

Tra 2 settimane, esercitazioni ANAC 2, venerdì, per i contatori, CLASSROOM.

ARBITO EUCLIDEO ($\mathbb{R}^k$)

Sia S il dominio di qui mia successione.

Def Sia (a_n) successione a valori in $\mathbb{R}$. Si dice che essa ~~esiste~~ ^{$-\infty$} ~~tende a~~ ^{tende a} $+\infty$ se $\forall M \in \mathbb{R} \exists n_M \in \mathbb{N} \text{ t.c.}$

$n \geq n_M \Rightarrow a_n \geq M$ qualsiasi soglia noi poniamo, verrà superata da un certo indice.

$\bullet (a_n) \rightarrow \vec{a}, (b_n) \rightarrow \vec{b} \Rightarrow$
 $\Rightarrow (\alpha a_n + \beta b_n) \rightarrow \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

OSS $a_n = \begin{pmatrix} a_1^n \\ a_2^n \\ a_3^n \\ \vdots \\ a_k^n \end{pmatrix}$ l'indice è l'indice della successione, l'apice fa riferimento alla componente

Sia (a_n) a valori in $\mathbb{R}^n$,

Allora $(a_n) \rightarrow \vec{a}$ se e solo se

$\forall 1 \leq i \leq k$ e $(a_n^i) \rightarrow a^i$, dove

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^k \end{pmatrix}$

Successione convergente, se il limite converge alla componente corrispondente alla success. converge

$B \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \neq \emptyset$. Sia $k \in \mathbb{N}^*$
 $f: B \rightarrow \mathbb{R}^k$ $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix}$, $f_i: B \rightarrow \mathbb{R}$
 lo vettore come un
 vettore di k funzioni
 a valori in $\mathbb{R}$.

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m x_i^2} \quad x \in \mathbb{R}^m \rightarrow \text{norma euclidea}$$

Def.

Sia $B \subseteq \mathbb{R}^m$, $B \neq \emptyset$

Sia $f: B \rightarrow \mathbb{R}^k$ $\vec{x} \in \text{Acc}(B)$

Sia $\vec{l} \in \mathbb{R}^k$. Allora si dice
 che $f(x)$ tende a $\vec{l}$ per $x \rightarrow \vec{x}$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c.}$$

$$0 < \|x - \vec{x}\|_m \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(x) - \vec{l}\|_k \leq \varepsilon$$

norma in $\mathbb{R}^m$
norma in $\mathbb{R}^k$

↳ quantità strettamente maggiore di 0, il limite
 mi dice cosa accade nelle vicinanze di $\vec{x}$, quindi
 non voglio che x sia uguale a $\vec{x}$. $\vec{x}$ è un
 punto di accumulazione, quindi non sappiamo
 neanche se $\vec{x} \in B$, ma essendo un punto di accum.
 posso avvicinarmi senza problemi.

$$\hookrightarrow \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \vec{l}$$

Prop.

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \vec{l} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \bar{x}} \|f(x) - \vec{l}\| = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq k \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f_i(x) = l_i$$

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_k \end{pmatrix} \quad \vec{l} = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_k \end{pmatrix}$$

Prop.

Sia $\bar{x} \in \text{Acc}(B)$. Sia poi $\vec{l} \in \mathbb{R}^k$.

Allora $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \vec{l}$ se e solo se

$\forall (x_n) \rightarrow \bar{x}, \quad \bar{x} \notin \text{supp}((x_n)), \text{ e }$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \vec{l}$$

qualsiasi sia la suc-
c. tende a quel

limite $\vec{l}$ = a $\vec{l}$. Posso valutare il caso
per ogni suc. Verifico queste ipotesi.

Def.

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = \vec{l} \stackrel{\text{def.}}{=} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists R_\varepsilon > 0$$

raggio

$$\text{t.c. } \|x\| \geq R_\varepsilon \Rightarrow \|f(x) - \vec{l}\|_k \leq \varepsilon$$

quello sia il mio ε positivo, quanto piccolo,
 posso sempre trovare una palla
 centrata nell'origine e di raggio R_ε tale che al di fuori di
 quella palla $\|f(x) - \vec{l}\|$ sia minore di ε .
 quando mi allontano, mi avvicino a $\vec{l}$.

Il limite a $\pm\infty$ si $f = l \Leftrightarrow$ accade cio' $\uparrow$

KKK

