

Lemma 5 Sossus AMOVS

Teorema del confronto 1

Siano $f, g, h: B \rightarrow \mathbb{R}$

$\emptyset \neq B \subseteq \mathbb{R}^n$ Sia $\bar{x} \in \text{Acc}(B)$

Esista un $\delta > 0$ c.c.

$\forall x \in B(\bar{x}, \delta) \cap B$, sia

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

lotta che vale la disq.
per punti suffic. vicini
ad $\bar{x}$

Sia $l \in \mathbb{R}$ e

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} h(x) = l$$

Allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x) = l$$

vale quando la f. è infinitesima

OSS

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = 0 \iff \lim_{x \rightarrow \bar{x}} |f(x)| = 0$$

Teorema del confronto 2

Sia $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x) = +\infty$. Allora

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} h(x) = +\infty$$

Definizione

Topologica

Siano (X, τ) e $(Y, \tilde{\tau})$ due spazi topologici.

Una $f: X \rightarrow Y$ si dice

CONTINUA se $\forall B \in \tilde{\tau}$, è:

$$f^{-1}(B) \in \tau$$

la sua immagine inversa
è in una famiglia di τ

$$f^{-1}(C) := \{x \in X : \exists y \in C \text{ per cui } f(x) = y\}$$

Def.

Continuità in un punto

Siano (X, d) e $(Y, \tilde{d})$ sp. metrici. Sia $B \subseteq X$ e $f: B \rightarrow Y$

devo stare in B ed essere un punto di acc.

Sia $\bar{x} \in \text{Acc}(B) \cap B$.

Allora f è CONTINUO in $\bar{x}$

se e solo se, per definizione

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$$

Def. Sia $\bar{x} \in \text{Acc}(B)$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = y \in Y$$

$\Updownarrow$ def

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} d(f(x), y) = 0$$

$\Updownarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } x \in \underline{B}(\bar{x}, \delta_\varepsilon) \Rightarrow f(x) \in B(y, \varepsilon)$$

$\Updownarrow$

$$\forall x: 0 < d(x, \bar{x}) \leq \delta_\varepsilon$$

$\Downarrow$

$$d(f(x), y) \leq 0$$



Domanda

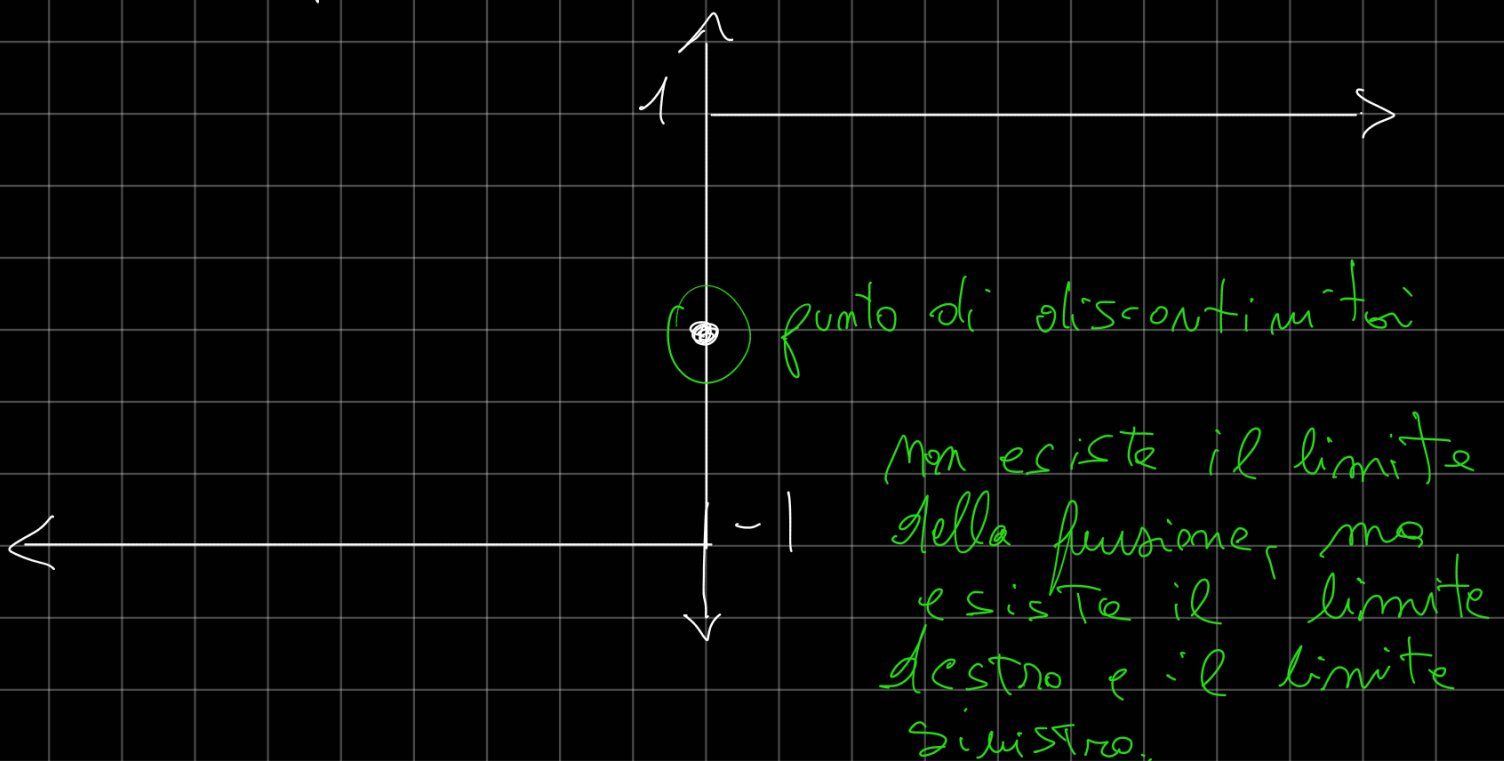
Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

È? $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

1

il limite esiste ed è uguale ad 1.
la funzione non è continua perché il
valore del limite è diverso dal valore
della funzione



$\mathbb{R}^m$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

$$\prod_{i=1}^m x_i^{m_i} \quad m_i \in \mathbb{N}$$

←

generico
di grado

MONOMIO

$$\sum_{i=1}^m m_i$$

Si sommano
i gradi

Polinomio: Somma finita di monomi.

Def Sia (X_i, τ_i) , $i = 1, 2, 3$,
spazi topologici.

Sia $f: X_1 \rightarrow X_2$ e $g: X_2 \rightarrow X_3$

continue, Allora $g \circ f: X_1 \rightarrow X_3$

è CONTINUA. *composiz. di funzioni continue, è continua.*

e continua in X_1 .

Sia $\bar{x} \in \text{Acc}(X_1) \cap X_1$

$\bar{y} = f(\bar{x}) \in \text{Acc}(X_2) \cap X_2$

Sia f continua in $\bar{x}$,

g continua in $\bar{y}$, allora

$g \circ f$ è CONTINUA in $\bar{x}$

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

generalizzato. vale
direz. del valore
assoluto

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Es. pratico

$$f(x,y) = \frac{3x^2 - 7y^2}{|x| + 5|y|}$$

$$0 \leq \frac{3x^2}{|x| + 5|y|} \leq \frac{3x^2}{|x|} = 3|x| \rightarrow 0$$

questione di Teorema 0
Ideo un
adotando

facciamo la stessa cosa non

$$\frac{-7y^2}{|x| + 5|y|}$$

$$0 \leq \frac{7y^2}{|x| + 5|y|} \leq \frac{7}{5}|y| \rightarrow 0$$

per confronto

Altro + D.L.C., prendo il valore assoluto
della f.

per la dis. triangolare

$$0 \leq \left| \frac{3x^2 - 7y^2}{|x| + 5|y|} \right| \leq \frac{3x^2 + 7y^2}{|x| + 5|y|} \leq$$

$$\leq \frac{3x^2 + 7y^2}{|x| + |y|} \leq \frac{3(x^2 + y^2)}{|x| + |y|}$$

questa cosa
posso farla per la
disuguaglianza di

OSS. $\forall p, q \geq 1$

numeri positivi

$$|x| + |y|$$

$$\exists M_{p,q} \quad \tilde{M}_{p,q} > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall x \neq 0 \rightarrow$$

$$\tilde{M}_{p,q} < \frac{\|\vec{x}\|_p}{\|\vec{x}\|_q} < M_{p,q}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

$$= \frac{3\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|} \cdot \sqrt{x^2+y^2} \leq 3 \cdot M_{2,1} \cdot \sqrt{x^2+y^2}$$

→ numero positivo fissato

norma euclidea

norma tendente a 0
= 0.

Tende a 0.

$$\frac{\sin(3x^2 - 7y^2)}{|x| + 5|y|}$$

prevaliamo il
limite zero

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

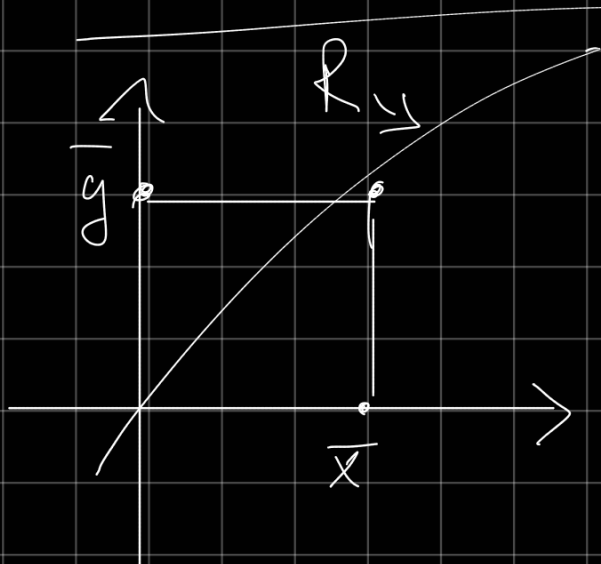
$$\frac{\sin(3x^2 - 7y^2)}{|x| + 5|y|}$$

$$\frac{\sin(3x^2 - 7y^2)}{3x^2 - 7y^2}$$

$$\frac{3x^2 - 7y^2}{|x| + 5|y|}$$

↳ Teorema 1

↳ Teorema 0



$$h: \tilde{B}(\tilde{x}, \tilde{y}, p) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h|_r$$

$$y = mx + q$$

coef. angolare

termine noto

$$x = \tilde{m}y + \tilde{q}$$

$$r: t \mapsto (\alpha_1 t + \beta_1, \alpha_2 t + \beta_2)$$

generalizzare, fare moltiplicazione

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (\bar{x}, \bar{y})^T = (\alpha_1 \bar{t} + \beta_1, \alpha_2 \bar{t} + \beta_2)^T$$

$$h|_r := h \circ r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

(mi sto muovendo solo lungo questa retta)

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}} h|_r$$

$$r_2, r_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto (\bar{t}, \bar{y})$$

$$t \mapsto (\bar{x}, \bar{t})$$

Funz. norma euclidea

$$h(x, y) = x^2 + y^2$$

$$h|_r(t) = (\alpha_1 t + \beta_1)^2 + (\alpha_2 t + \beta_2)^2$$

$$\left. \begin{aligned} &(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) t^2 + 2(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2) t + \\ &(\beta_1^2 + \beta_2^2) \end{aligned} \right\} \text{ non dipende solo dal parametro } t.$$

$$y = mx + q$$

→ generalizzare,
 lo il vantaggio
 di prendere le
 rette verticali.

$$h|_r = h(x, mx + q)$$

Caso generale

limite dimensionale

$$r: t \rightarrow (\alpha_1 t + \beta_1, \alpha_2 t + \beta_2, \dots, \alpha_n t + \beta_n)$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

restringo il limite
 alla retta, limite
 dimensionale lungo la
 dimensione di una
 retta

Algoritmo noto per
 parametrizzare una retta

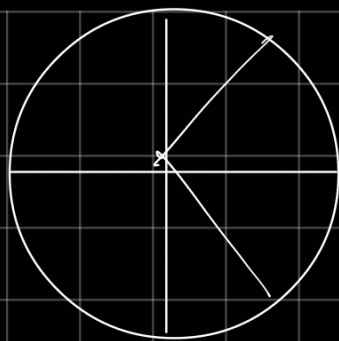
Vettore

vettore norma 1

$$\left| \leftarrow \rightarrow \right| \text{ in } \mathbb{R}$$

$$\|\vec{x}\| = 1$$

$\mathbb{R}^2$



direzioni 1, sono infiniti

$\hat{v}$
= versione

$$f(\vec{x} + t\hat{v})$$

altro modo per parametrizzare.

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\vec{x} + t\hat{v})$$

il valore di $\hat{v}$ determina sia la rotta che la direzione verso cui mi sto muovendo

$$f(\tilde{m}y + q, y)$$

$$f|_V = f(x, mx + q)$$

Relazione tra esistenza limite e esistenza del limite direzionale.

Se esiste il limite, devono esistere tutti i limiti direzionali (perché sottocasi), però non vale il viceversa.

L'esistenza e l'esistenza dei limiti direzionali non implicano l'esistenza del limite.

Qualche esempio...

$$h(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|}$$

In $\mathbb{R}^2$ meno l'origine

Se prendo $x = 0$

$$\frac{\sqrt{y^2}}{|y|} = \frac{|y|}{|y|} = 1$$

mi sono tolto
lo zero in mente,
posso parafrasare.

$$h(x, mx)$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + m^2 x^2}}{|x| + |mx|} = \frac{\cancel{|x|} \sqrt{1 + m^2}}{\cancel{|x|} (1 + |m|)} = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{1 + |m|}$$

non esiste il limite, perché i limiti direzionali
esistono, ma sono tutti diversi tra loro, a seconda
della direzione attraverso cui ci muoviamo.

i limiti direzionali ci servono in negativo per
vedere se il limite non esiste

$$\begin{array}{r} z \\ x \quad y \\ \hline x^4 + y^2 \end{array}$$

$$\frac{mx^3}{x^4 + m^2 x^2} = \frac{x^3 \cdot m}{x^2 (x^2 + m^2)}$$

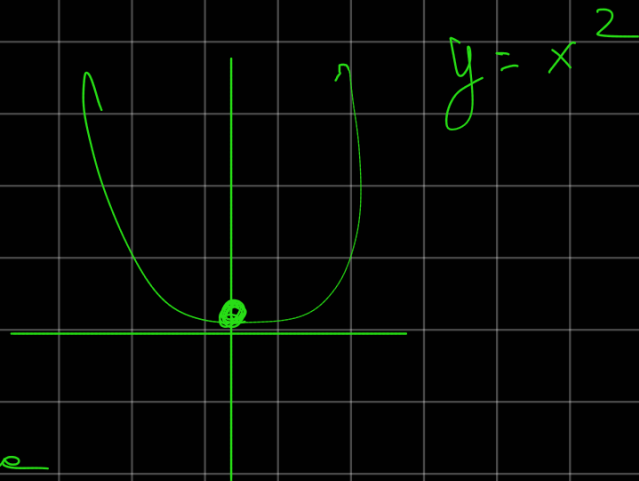
$$\frac{x \cdot m}{x^2 + m^2}$$

quando x tende a 0, è
uguale a 0
il limite però non esiste

$f(x)$ diviso tutto per x^2

$$1 + \left(\frac{y}{x^2} \right)^2$$

mi muovo lungo una parabola
invece che una retta



il limite non può esistere,
se mi muovo lungo la
parabola $y = \frac{1}{2}$, lungo la
retta ottengo 0, limite diverso.
Studiare lungo la direzione non basta.