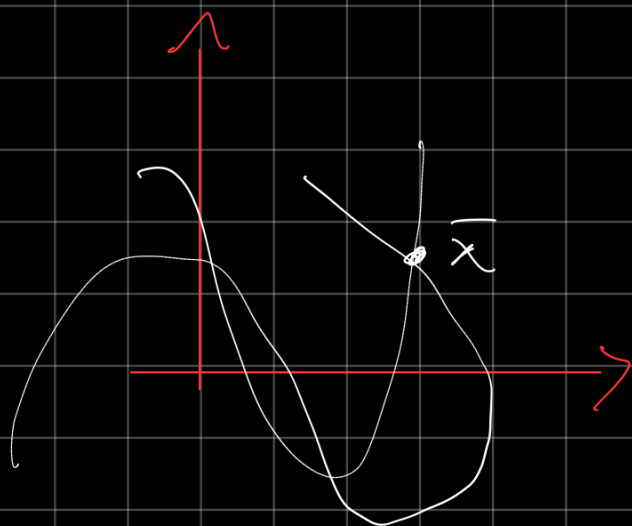
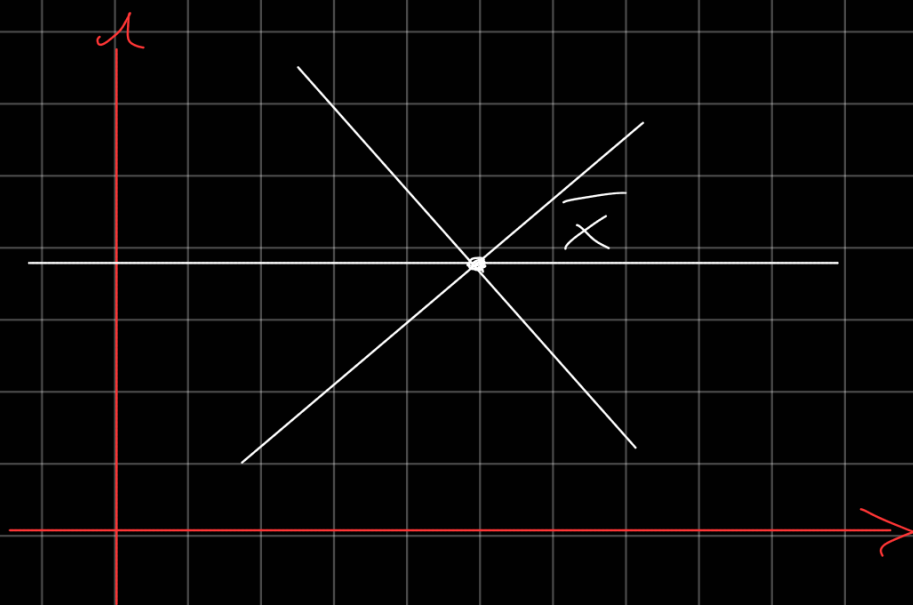




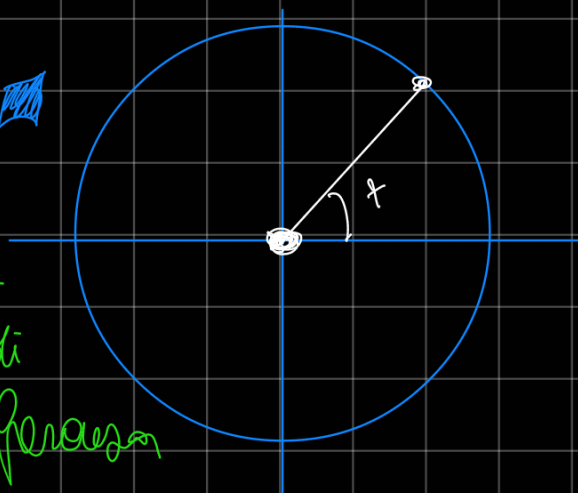
Def. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un generico intervallo generalizzato. Una qualsiasi funzione continua $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice curva continua.

$$\phi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

diventa iniettiva e suriettiva sull'immagine

qualsiasi punto di una circonferenza



translation significa aggiungere una costante

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

$$\cos t = \cos(k \cdot 2\pi + t) \quad \text{da percorriamo infinite volte.}$$

$f: \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua

$$\Gamma_f := \left\{ (x, f(x))^T : x \in \mathcal{I} \right\}$$

$$\phi(t) = (t, f(t))^T$$

sto parametrizzando il grafico

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \vdots \\ \phi_n(t) \end{pmatrix} \quad \phi_k: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$$

Def Sia $\bar{x} \in \mathbb{R}^m$. Sia $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$

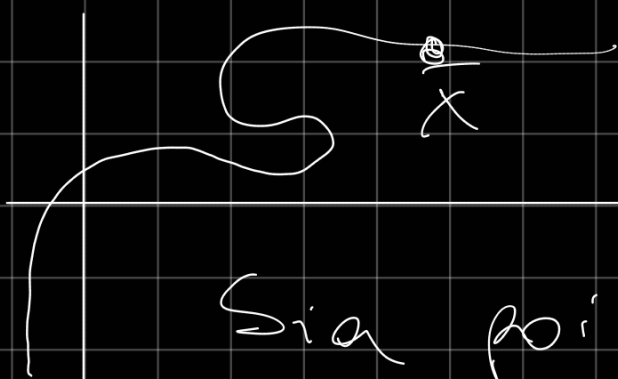
intervallo generalizzato.

$$t \in \mathcal{I}, \quad \phi: \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

curva continua e

$$\text{Sia } \phi(\bar{t}) = \bar{x} \text{ e } \phi^{-1}(\bar{x}) = \{ \bar{t} \}$$

$\bar{x}$ è raggiunto una e una sola volta da $\bar{t}$



Sia poi $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$

Definiamo limite lungo ϕ per
 $X \rightarrow \bar{X}$ se esiste

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}} f(\phi(t))$$

restringo la mia
 f alla ϕ , caso
 generico multivariabile,
 uso di $\lim$, composta
 per componente

ES

esso suppone

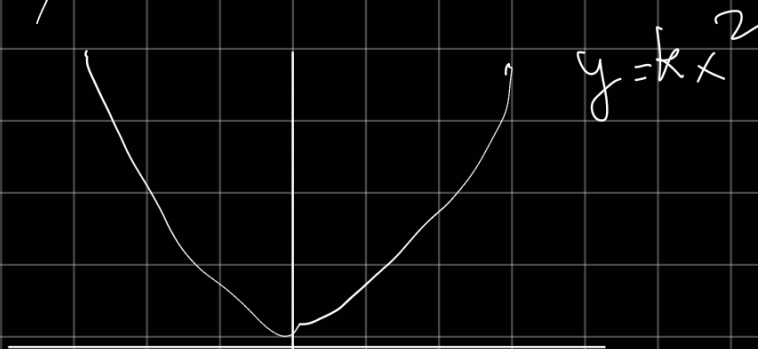
con $\bar{X} \in \text{Acc}(A)$

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$



$$\frac{\frac{y}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x^2}\right)^2} = \frac{\frac{y}{x^2} x^2}{x^4 + y^2}$$

||



$$\phi_k(t) = \begin{pmatrix} t \\ kt^2 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R} \text{ fissato}$$

l'originario con parole fatte così

$$= \frac{y/x^2}{1 + \left(\frac{y}{x^2} \right)^2}$$

restringo la funzione alla parabola
al posto di x metto t ,
al posto di y , kt^2

$$h(\phi_k(t)) = \frac{kt^2}{t^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{kt^2}{t^2} \right)^2}$$

$$\bar{t} = 0$$

$$= \frac{k}{1+k^2}$$

Quindi lungo ϕ_k il limite
di h esiste e vale $\frac{k}{1+k^2}$ per $\vec{x} \rightarrow \vec{0}$
il limite non esiste

$$\frac{y/x^3}{1 + \left(\frac{y}{x^3} \right)^2} = \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$$

$$\vec{F} = \vec{0}$$

$$(x, mx)^T$$

$$\frac{x^3 \cdot mx}{x^6 + m^2 x^2} = \frac{x^4 \cdot m}{\cancel{x^2} (x^4 + m^2)}$$

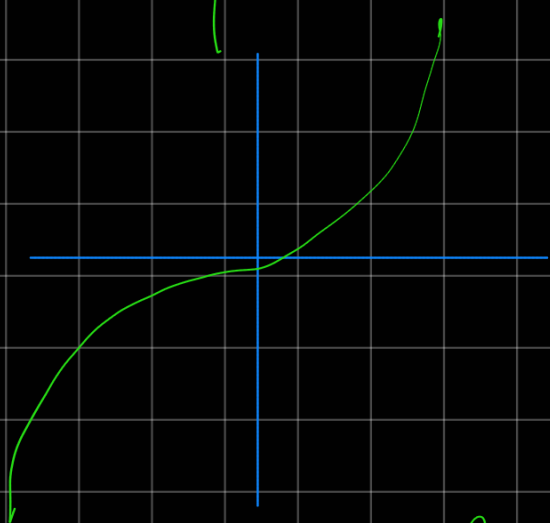
quando x tende a 0 , somo tende a 0 ,
 se lo si vede da m^2 , lungo l'asse x o y
 tende a 0 , lungo l'altra direzione

$$(x, kx^2)^T$$

$$\frac{x^3 \cdot kx^2}{x^6 + k^2 x^4} = \frac{\cancel{x^4} \cdot k}{\cancel{x^4} (k^2 + x^2)}$$

$k=0$
 parabola di
 genere, $x=0$

considero k diverso da 0 , si tende a 0 lungo
 la parabola, se mi muovo lungo la cubica



$$y = kx^3$$

osservo che per ogni parabola
 è $= 0$, se prendo una
 cubica, è differente,

posso farlo con $x^2, x^3, \dots, x^n$, se
 da un certo momento in poi, vediamo che la f
 tende a qualcosa di diverso. IL LIMITE DIR.
 CI DICE POCO SULL'ESISTENZA DEL LIMITE

Se un vettore x in poi, potrebbe tendere a qualcosa di diverso

$$f(x, y) = \frac{|x| + |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$f(0, y) = \frac{|y|}{|y|} = 1$$

Radice di ordine pari, sempre positiva

entre le due rette posso parametrizzare....

$$y = mx$$

$$f(x, mx) = \frac{|x| + |m| \cdot |x|}{\sqrt{x^2(1+m^2)}} = \frac{|x| \cdot (1+|m|)}{|x| \cdot \sqrt{1+m^2}}$$

$$= \frac{1+|m|}{\sqrt{1+m^2}}$$

limiti stes. esistono ma
sono diversi tra loro,
il limite sulla f non
può esistere

Prima applicazione Teorema Bol

$$f_\alpha(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^\alpha}{|x| + |y|}$$

① se $\alpha > \frac{1}{2}$ allora il $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_\alpha(x, y) = 0$

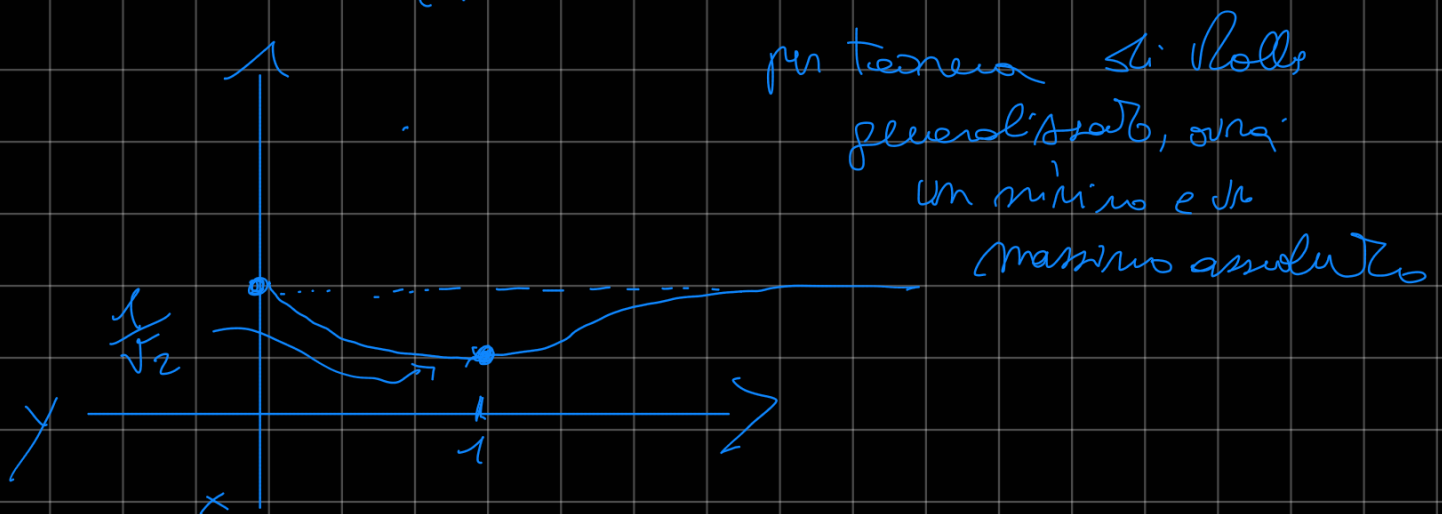
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|} \leq 1$$

Dim $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|}$ dividendo sopra e giù per $|x|$

$$= \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{|y|}{|x|}\right)^2}}{1 + \frac{|y|}{|x|}} \quad t = \left(\frac{|y|}{|x|}\right)^2 \geq 0$$

Studio la $\psi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$

$$\psi(t) = \frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t}$$



Studiamo la derivata e vediamo cosa combina...

$$\left(\sqrt{1+t^2} \right)' (1+t) - \sqrt{1+t^2} (1+t)'$$

$$(1+t)^2$$

$$2t \frac{1}{2\sqrt{1+t^2}} (1+t) - \sqrt{1+t^2}$$

$$(1+t)^2$$

$$\frac{t(1+t) - (1+t^2)}{(1+t)^2 \sqrt{1+t^2}} = \frac{t + \cancel{t^2} - 1}{(1+t^2) \sqrt{1+t^2}} = \frac{\cancel{t^2}}{(1+t^2) \sqrt{1+t^2}}$$

$$\frac{\sqrt{1+t^2}}{1+t}$$

$$\frac{\cancel{t} \sqrt{\cancel{t^2}} \left(\frac{1}{\cancel{t^2}} + 1 \right)}{\cancel{t} \left(\frac{1}{\cancel{t^2}} + 1 \right)} \rightarrow 1$$

$$\frac{t-1}{(1+t)^2 \sqrt{1+t^2}}$$

$$\text{für } t = 1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

minimo assoluto
in '1',

al max assoluto lo raggiunge in 0

$$\frac{(1+t^p)^{1/p}}{1+t}$$

$$\frac{(|x|^p + |y|^p)^{1/p}}{|x| + |y|}$$

sono analoghi

$$\textcircled{1} \quad \alpha > \frac{1}{2}$$

$$\frac{(x^2 + y^2)^\alpha}{|x| + |y|}$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} (x^2 + y^2)^{\alpha - \frac{1}{2}}}{|x| + |y|}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|} (x^2 + y^2)^{\alpha - \frac{1}{2}}$$

$$\geq 1 \cdot (x^2 + y^2)^{\alpha - \frac{1}{2}}$$

$$= \left[(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \right]^{2\alpha}$$

$$\alpha - \frac{1}{2} > 0$$

=
norma euclidea,
sempre continua.
composta di fn continue

$$N_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\phi(t) = 1 + t^{2\alpha}$$

$$\phi(N_2(x, y)) \rightarrow 0$$

ho incapsulato la fn tra una fn. nulla e
una funzione a 0. Teo del confronto

$$(2) \alpha < \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|} (x^2 + y^2)^{\alpha - \frac{1}{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{1}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2} - \alpha}}$$

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha > 0 \rightarrow +\infty$$

$$\frac{1}{0^+}$$

Indicazione Teorema 2

$$a, b, c, d \geq 0$$

finito

$$(ax^2 + by^2)^\alpha$$

valgano gli stessi
risultati.

$$C|x| + C|y|$$

$$\alpha > 0 \rightarrow 0$$

$$\rightarrow 0$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

lim non esiste

$$\textcircled{1} \alpha \geq \frac{1}{2} \quad \tilde{f}(x, y)$$

$$\alpha < 0 \rightarrow +\infty$$

$$\rightarrow +\infty$$

$$A = \max(a, b), \quad C = \min(c, d)$$

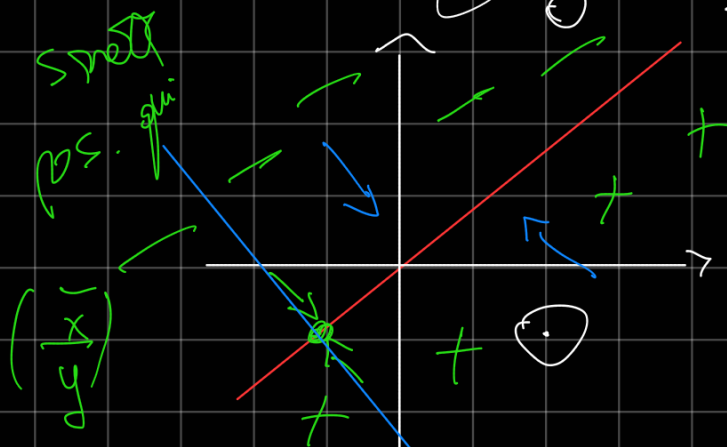
$$0 \leq \tilde{f}(x, y) \leq (Ax^2 + Ay^2)^\alpha$$

$\alpha > 0$ Convergenza di direz.
 A, C , strettamente positivi

$$C|x| + C|y|$$

$$= \frac{A^\alpha}{C} \frac{(x^2 + y^2)^\alpha}{|x| + |y|}$$

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x-y} & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$$



strett. negativa qui

se ti avvicini da sopra: $-\infty$
se ti avvicini da sotto: $+\infty$

quindi limiti? vedo a calcolare: limiti diversi, molti

$$\bar{x} = \bar{y} \quad \left(\frac{\bar{x}}{\bar{y}} \right) \quad \bar{x} = \bar{y}$$

muovendosi in perpendicolare, ti muovi per una retta del tipo

$$y = -x + q$$

$$y = -x + (\bar{x} + \bar{y})$$

$$2\bar{x} = \bar{y} + \bar{x} = q$$

$$\frac{1}{x-y}$$

al posto di y

ponendo questa perpendicolare

$$y = -x + (\bar{x} + \bar{y}) = -x + 2\bar{x}$$

$$\frac{1}{x - (-x + \bar{x} + \bar{y})}$$

$$= \frac{1}{2(x - \bar{x})}$$

se ti avvicini da sopra, la quantità

$$\begin{aligned} & \rightarrow +\infty \quad \text{se } x \rightarrow \bar{x}^+ \\ & \rightarrow -\infty \quad \text{se } x \rightarrow \bar{x}^- \end{aligned}$$

lungo tutta la retta discontinua

$$x - y = t$$

$$\phi(x - y)$$

$$z \rightarrow \frac{1}{z}$$

$$a \text{ z associa } \frac{1}{z}$$



$$\frac{x^2 + y^2}{x - y}$$

$$y = mx$$

mi muovo lungo le
dove rotto.

$$\frac{x^2 (1 + m^2)}{x(1 - m)} = x \cdot \frac{1 + m^2}{1 - m}$$

linea stressata con
segue ed e' parte di $\mathbb{D}$.

Curve di livello

$$\frac{x^2 + y^2}{x - y} = k \neq 0$$

$$x^2 + y^2 = kx - ky$$

$$y^2 + ky + (kx + x^2) = 0$$

proviamo
a risolvere
rispetto ad y

$$y = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4(kx + x^2)}}{2}$$

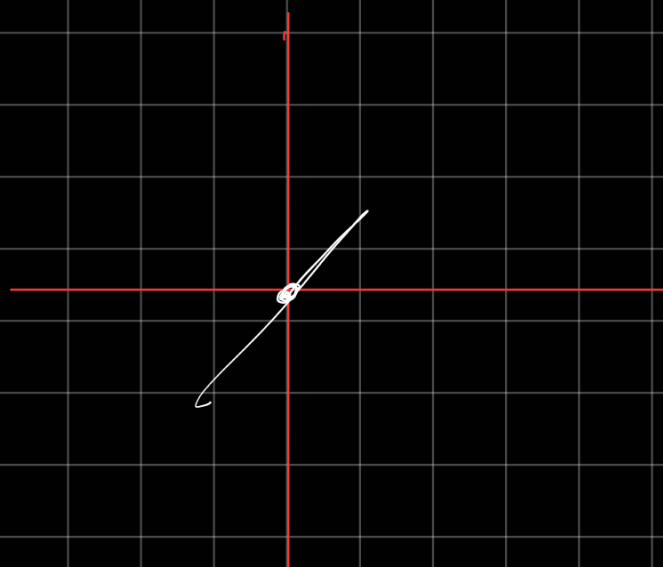
Se riesco a risolvere,
il punto $(0,0)$, appartiene

$$-K + \sqrt{K^2 - 4(-Kx + x^2)}$$

2

il grafico di questa fu

è ben definita
in un intorno suff.
piccolo di $x \neq K$
contiene $(0,0)$



Se io mi muovo lungo una
curva di livello, la funzione
mi vale identicamente K ,
e dunque il limite
sarà K , ma K posso
sceglierlo come mi
pare. Il limite
dunque non può esistere.

qui curva di livello contiene l'origine.
es. le curve di livello dei problemi precedenti
esempi, le curve di LV. erano T.p. le curve
per l'origine

$$\frac{x^2 + y^2}{x - y} = K \neq 0$$

Curve di livello =

Dato un parametro K , forse che
con funzione valga K

Curve di livello, utili in negativo.