

$$f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Gamma_f := \left\{ (x, y)^T : x \in A, y \in f(x) \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$F: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$$

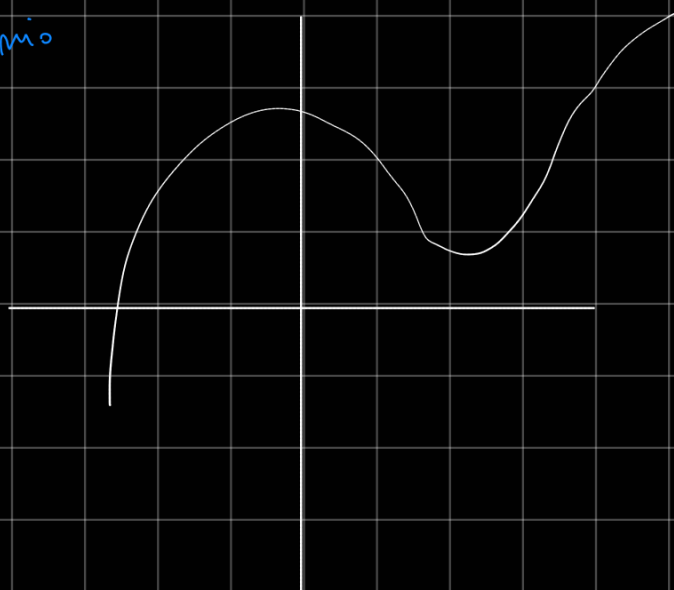
$$\Gamma_F := \left\{ (\vec{x}, \vec{y})^T : \vec{x} \in A, \vec{y} = F(\vec{x}) \right\} \subseteq \mathbb{R}^{n+k}$$

2 moduli
di

rappr.
isomorfismo

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_k)^T$$

$$n=2 \quad k=1 \quad \text{conformismo}$$



col equi
 x, y , corrisponde...

$$z = h(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$A = B \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T$$

dominio

man mano che
 ci avviciniamo al
 valore $z = 1$, le
 circonferenze
 parallele al
 x, y , si avvicinano
 al polo

$$z^2 + x^2 + y^2 = 1$$

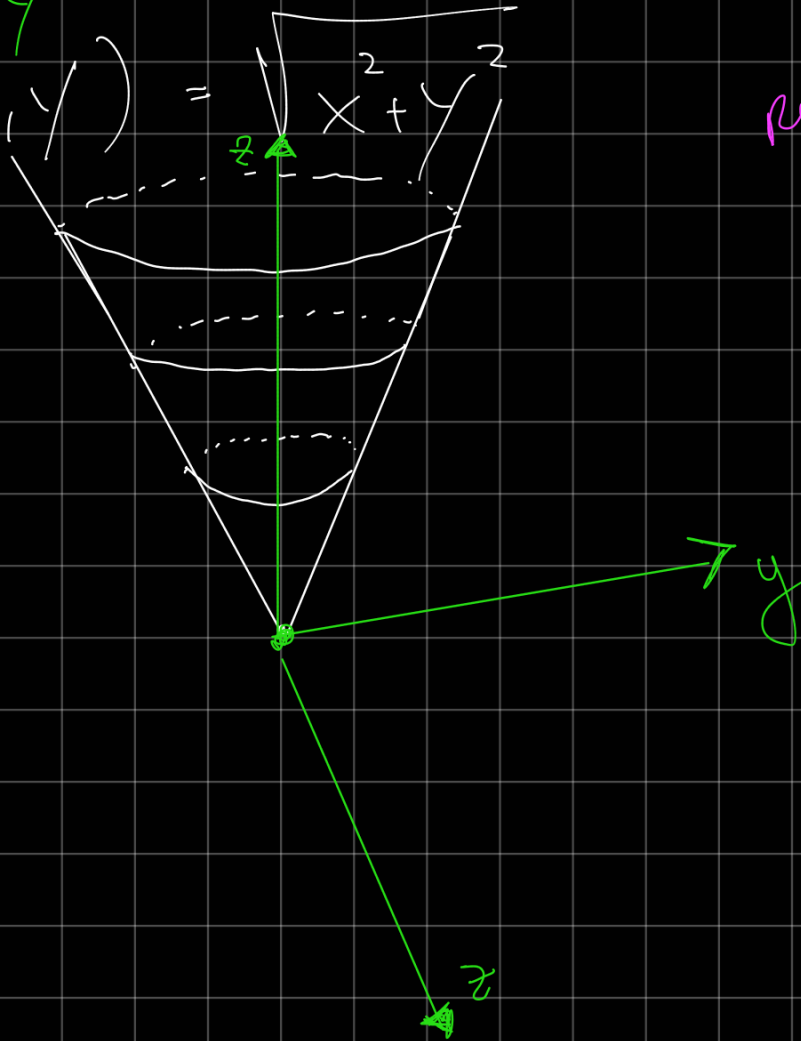
Come saranno proprio
 le CURVE DI LIVELLO?

CONO, NORMA EUCLIDEA

$$N: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty]$$

norma di x, y

$$N(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

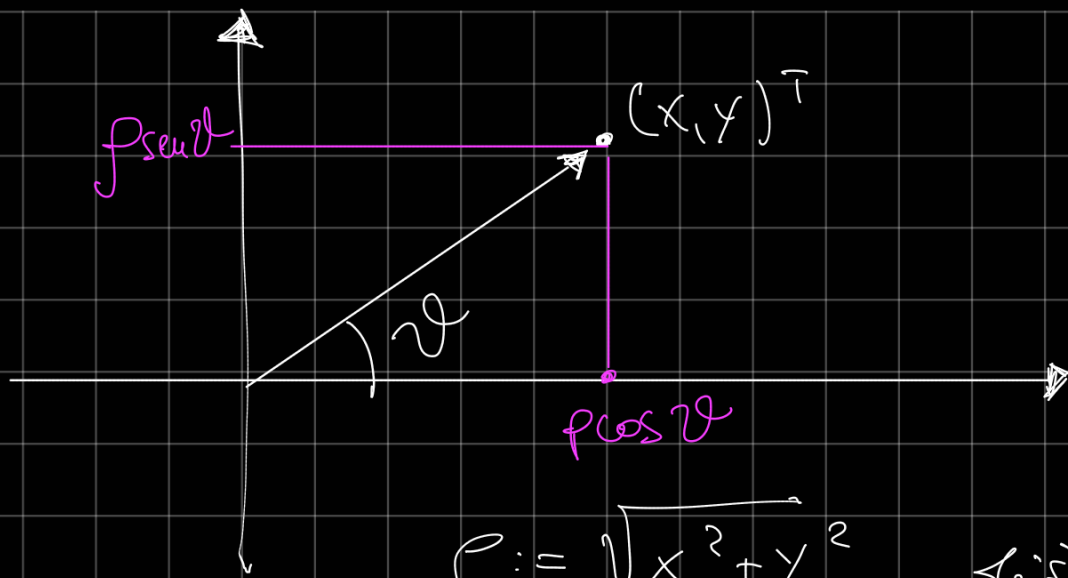


piano parallelo
al x, y in
quota K

Curve di livello: intersezione

↳ proiezione ^{orizz.} sul piano x, y

Coordinate polori



$$\rho := \sqrt{x^2 + y^2}$$

coppia

la distanza del
punto dall'origine,
NORMA EUCLIDEA

punto la

$$(0, +\infty) \times [0, 2\pi)$$

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{ \vec{0} \}$$

è punto $\mathbb{R}^2$ privo
del vettore nullo

$$(\rho, \theta) \rightarrow (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$$

ad ogni ρ, θ , gli assoc...

con questa relazione lo individua
una corrispondenza biunivoca tra

$$(0, +\infty) \times [0, 2\pi) \longleftrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{ \vec{0} \}$$

per ogni punto diverso dall'origine,
esiste una coppia ... individuo
in modo univoco il punto.
Ho introdotto un nuovo tipo di coordinate

Non ci mette 2π perché l'angolo = 0° forei
in giro completo, lo individuerai 2 volte

$$\vec{0} \in A \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

$f(x, y)$ può essere vista in
coord. polari, con
 $x = \rho \cos \vartheta$ e $y = \rho \sin \vartheta$

$$f(\rho, \vartheta) := f(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta)$$

Es.

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

norma al quadrato

$$x - y = \rho \cos \vartheta - \rho \sin \vartheta = \rho (\cos \vartheta - \sin \vartheta)$$

~~ES~~

Sia $\vec{0} \in \text{Acc}(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ Sia $l \in \mathbb{R}$

Sopponiamo $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = l$

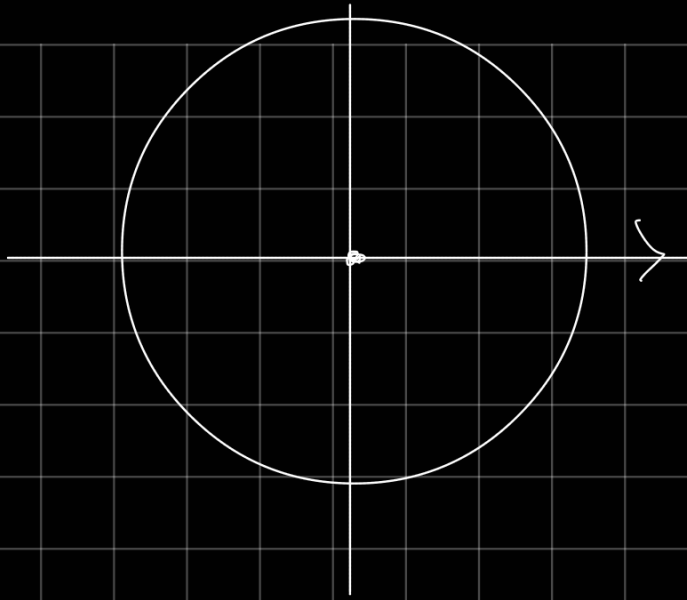
Allora questo è equivalente a:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x,y) - l| = 0$$

$\hookrightarrow$ la chiamo $g(x,y)$

Tutto ciò è equivalente a:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left[\sup_{\vec{z} \in \tilde{B}(\vec{0}, \rho)} |f(\vec{z}) - l| \right] = 0$$



il sup lo posso fare
sulla palla unitaria
o sulla sfera

ed anche equiv. a

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left[\sup_{\substack{\vec{z} \in \rho(\vec{0}, \rho) \\ \|\vec{z}\| = \rho}} |f(\vec{z}) - l| \right] = 0$$

Rappresentazione come
rappresentare in coordinate polari.

$$\dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow 2$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \rho_\varepsilon > 0 \text{ t.c. se } 0 < \rho < \rho_\varepsilon$$

Prop

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 0$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sup_{\rho(\vec{0}, \rho)} |g(x,y)| = 0$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \sup_{S(\vec{0}, \rho)} |g(x,y)| = 0$$

$$\{ \vec{z} : N(\vec{z}) = \rho \}$$

sfera

allora $\bigcirc \leq \sup_{\|\vec{x}\|=p} |g(x)| < \varepsilon$

questo punto basta notare che

$\sup_{\vec{B}(\vec{0}, p_\varepsilon)} |g(x)| \leq \sup_{0 < p < p_\varepsilon} \left[\sup_{\|\vec{x}\|=p} |g(x)| \right]$

anche è uguale, non ci va di dimostrare

IV

$\sup_{\vec{B}(\vec{0}, p)} |g(x)|, \forall 0 < p < p_\varepsilon$

Sup di un veggio minore, il sup è minore.

Osservato ciò ho che se $0 < p < p_\varepsilon$ allora

$\sup_{\vec{B}(\vec{0}, p)} |g(x)| < \varepsilon$



Usiamo la (3) con le cosol polari.

OSS. (3) è equivalente a

$\lim_{p \rightarrow 0^+} \sup_{\vartheta \in [0, 2\pi)} |\tilde{g}(\vartheta, p)| = 0$

dove $\tilde{g}$ è semplicemente g letto in coord. polari

Def Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$
Sia $\vec{0} \in \text{Acc}(A)$, $l \in \mathbb{R}$

Allora $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = l$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \left[\sup_{\vartheta \in [0, 2\pi)} |f(\rho, \vartheta) - l| \right] = 0$$

Es. pratico

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{|x| + |y|} = 0$$

rileggo la f
in polari

$$\frac{\rho^2}{|\rho \cos \vartheta| + |\rho \sin \vartheta|} = \frac{\rho}{|\cos \vartheta| + |\sin \vartheta|}$$

$$0 < \frac{\rho}{|\cos \vartheta| + |\sin \vartheta|} = \frac{1}{|\cos \vartheta| + |\sin \vartheta|} \cdot \rho$$

devo provare che il limite del sup di $f_\rho = 0$
devo stimare il sup. voglio provare
che il sup di ρ è uguale a ρ indipendente
da ϑ , applico confronto.

OSS.

se esiste un $M > 0$ t.c. $|f(\vartheta)| \leq M$, allora
 posso applicare la prop. e il Tes. del confronto. 

$$\frac{1}{|\cos \vartheta| + |\sin \vartheta|} \cdot f \leq M \cdot f \rightarrow 0$$

Ora dobbiamo trovare una maggiorazione
 uniforme che tende a 0.

regista. la qui.

$$\phi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\varphi(\vartheta) = \frac{1}{|\cos \vartheta| + |\sin \vartheta|}$$

seminorma ben definita

massimo assoluto raggiunto quando il buomin. è il
 minimo assoluto

Dimostrando che

$$\min [|\cos \vartheta| + |\sin \vartheta|] = m > 0$$

ho anche dimostrato che

$$0 < \frac{1}{|\cos \vartheta| + |\sin \vartheta|} \leq \frac{1}{m} \leftarrow \begin{matrix} \text{valore massimo} \\ \text{V. M. A.} \\ \text{assoluto} \end{matrix} = M$$

Se avessi aiuto

$\frac{1}{\cos \vartheta + 3 \sin \vartheta}$ non posso fare lo
stesso perché
posso scegliere valore
assoluto

Esempi pratici:

$$\frac{(x + 3y)^2}{\sqrt{x^2 + 2y^2}}$$

analizzo e sostituisco
con ϑ in coseno/seno

$$\frac{f^2 (\cos \vartheta + 3 \sin \vartheta)^2}{}$$

$$f \sqrt{f^2 (\cos^2 \vartheta + 2 \sin^2 \vartheta)}$$

$$= \frac{f (\cos \vartheta + 3 \sin \vartheta)^2}{\sqrt{(\cos^2 \vartheta + 2 \sin^2 \vartheta)}}$$

perché moltiplica una funzione che
dipende solo da ϑ

intanto scegliamo i valori e ci moltiplichiamo,
o viceversa, moltiplichiamo prima

$$\leq \frac{f(\cos \vartheta + 3 \sin \vartheta)^2}{\sqrt{\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta}}$$

$$1 + \sin^2 \vartheta \geq \sqrt{1} = 1$$

↓

→ mi sono tolta il nome il modo

$$\textcircled{1} \leq \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 \vartheta}} < 1$$

lo moltiplico con 1, niente termini.

$$\leq f(\cos \vartheta + 3 \sin \vartheta) \cdot 1$$

$$|\cos \vartheta + \sin \vartheta| \leq |\cos \vartheta| + 3|\sin \vartheta| \leq (|\cos \vartheta| + 3|\sin \vartheta|)^2$$

$$\leq (1 + 3 \cdot 1)^2 = 16$$

posso "approssimare" moltiplicare il numeratore con 16

lo stesso di

$$\underline{f(\cos \vartheta + 3 \sin \vartheta)^2 \cdot 1 \leq 16 f}$$

ho trovato una moltiplicazione, posso usare teo confronto

quindi per $\varphi \rightarrow 0$, 16φ va a 0

OPPURE $\Rightarrow$ Volgo 1 COST

$$f(\cos \varphi + 3 \sin \varphi)^2 =$$

$$f(\cos^2 \varphi + 9 \sin^2 \varphi + 6 \cos \varphi \sin \varphi) \leq$$

$$\leq f(1 + 9 \sin^2 \varphi + 6 \cdot 1) \stackrel{\text{maggiore}}{\leq} f(1 + 9 + 6)$$

$f(15)$

$$\frac{(x + 3y)^2}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} = \frac{x^2 + 6xy + 9y^2}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} =$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} + \frac{6xy}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} + \frac{9y^2}{\sqrt{x^2 + 2y^2}}$$

$$0 < \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} \stackrel{\text{maggiore addendo per addendo}}{\leq} \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} = |x| = 0$$

Volgo ci si sta
50 pezzi in y

Polinomio di grado 2 in x

$$0 < \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} \leq \frac{y^2}{\sqrt{2y^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} |y| \rightarrow 0$$

per il teorema dei valori intermedi
per il valore assoluto

$$0 < \frac{6|x| \cdot |y|}{\sqrt{x^2 + 2y^2}} \leq \frac{6|x| \cdot |y|}{|x|} = 6|y| \rightarrow 0$$

Prodotto scalare

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ $(\cdot, \cdot)$

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad \|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$$

$\vec{x} \cdot \vec{y}$ Diseg. di Cauchy-Schwarz

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

~~OK~~

$$\forall \vec{z} \in \mathbb{R}^n, \langle \vec{z}, \vec{z} \rangle \geq 0$$

$$\langle \vec{z}, \vec{z} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{z} = \vec{0}$$

