

Anal 2 Lezione 8

(V, N) Spazio normato
Sp. vettoriale norma.

Def.

Uno spazio normato che sia anche completo si dice spazio di

Banach $\square$

Def.

Sia V spazio vettoriale.

Una funzione $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$

si dice un prodotto scalare (o interno)

definito se:

$$1) \forall v \in V, \langle v, v \rangle \geq 0 \text{ e}$$

$$\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = \vec{0} ;$$

$$2) \forall v, w \in V \quad \langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle;$$

$$3) \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall v, w, z \in V$$

$$\langle \alpha v + \beta w, z \rangle = \alpha \langle v, z \rangle + \beta \langle w, z \rangle$$

$$\langle z, \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle z, v \rangle + \beta \langle z, w \rangle$$

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

$$\mathbb{R}^n \quad \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle := \sum_{i=1}^n v_i w_i$$

questo prod.
scalare induce
la norma
euclidea

Def.

Uno spazio vettoriale dotato di

prodotto scalare ≥ 0 , la cui norma

indotta la norma di Banach,

si dice **SPAZIO DI HILBERT**

Gli spazi di Hilbert di dimensione

finita sono tra loro equivalenti.

anche gli spazi di Banach finiti,
inducendo la stessa topologia

due vettori si dicono ortogonali se il loro prodotto scalare è 0.

Def.

Sia H sp di Hilbert, $V \subseteq H$ sottospazio vettoriale

$$V^\perp = \{ w \in H : \langle w, v \rangle = 0, \forall v \in V \}$$

l'insieme degli ortogonali è un sottospazio vettoriale

Teorema del Biontognolo

Sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$ sottospazio vettoriale.

$$\text{Allora } (V^\perp)^\perp = V$$

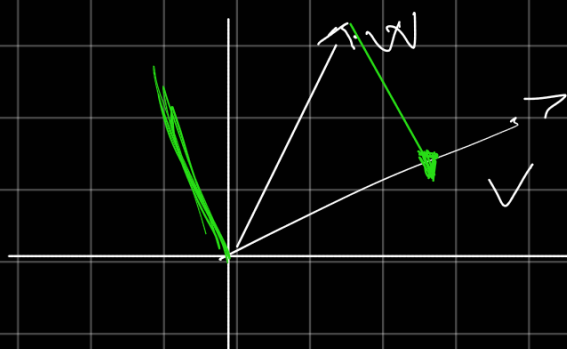
$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

$$\langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \quad v, w \neq \vec{0}$$

$$\Rightarrow \exists \mu \in \mathbb{R} \text{ t.c. } v = \mu w$$

Gram-Schmidt qualcosa

$$V - \frac{\langle W, V \rangle}{\|W\|^2} \cdot W$$



Sto togliendo la parte proiettata

$$V = \{ \alpha v : \alpha \in \mathbb{R} \}$$

la retta generata da v

① $U \in V^\perp$, infatti:

$$U = W - \frac{\langle W, V \rangle}{\|V\|^2} \cdot V$$

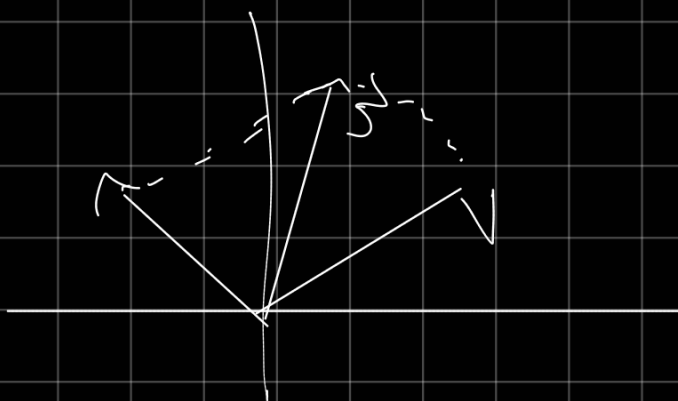
$$\langle V, U \rangle = \langle V, W \rangle - \frac{\langle V, W \rangle}{\|V\|^2} \langle V, V \rangle = 0$$

quindi $U \in V^\perp$

② $W \in (V^\perp)^\perp$

$$\begin{aligned} \langle W, U \rangle &= \langle W, W - \frac{\langle W, V \rangle}{\|V\|^2} \cdot V \rangle = \\ &= \|W\|^2 - \frac{\langle W, V \rangle^2}{\|V\|^2} = \|W\|^2 - \frac{\|W\|^2 \cdot \|V\|^2}{\|V\|^2} \end{aligned}$$

$$= \|v\|^2 - \|v\|^2 = 0$$



STONELLA RANDOM

Spazio Hilbert: normalizzabile.

Ma una norma che rende il mio spazio completo, poi c'è un modo scelto, che induce la norma su se stesso, confronto le due norme e vedo che sono uguali.