

ipotesi

① $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Lea. 9

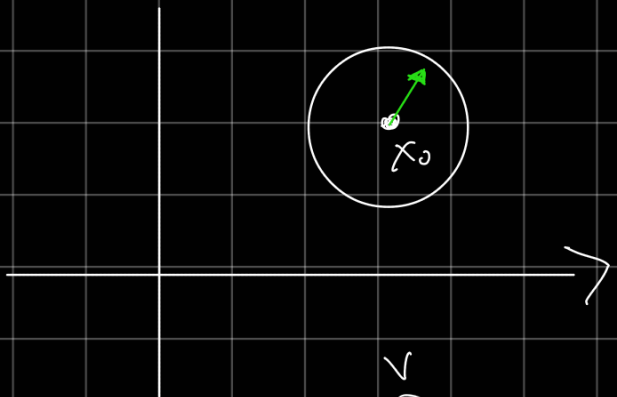
aperto, $x_0 \in \Omega$

Oss

Se $r > 0$ è sufficientemente piccolo,

$\forall \hat{v}$ versore di $\mathbb{R}^n$, $x_0 + t\hat{v} \in \Omega$,

se $|t| < r$. ~~---~~



moversi lungo il versore $\hat{v}$

Oss. Se $x \in \overset{r}{B}(x_0, r)$, allora

$$x = x_0 + \underbrace{\|x - x_0\|}_{\leq r} \cdot \underbrace{\frac{(x - x_0)}{\|x - x_0\|}}_{\text{versore, norma 1, direzione normalizzata}}$$

Oss.

Sia $x_0 = \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^2 \\ \vdots \\ x_0^n \end{pmatrix} \in \Omega$. Sia $1 \leq k \leq n$.

Allora se $|x_0^k - t|$ è sufficientemente piccolo,

Allora

$$\begin{pmatrix} x_0^1 \\ \vdots \\ x_0^{k-1} \\ t \\ \vdots \\ x_0^m \end{pmatrix}$$

Sto facendo variare la variabile k -esima, mi sto muovendo lungo la direzione individuata dalla variabile k -esima, $\in \Omega$

Quindi esiste un $r > 0$ t.c. $\forall x_0$ per cui

$$|x_0^k - t| < r \quad \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^{k-1} \\ t \\ \vdots \\ x_0^m \end{pmatrix} \in \Omega.$$

$$r_k: (x_0^k - r, x_0^k + r) \rightarrow \Omega$$

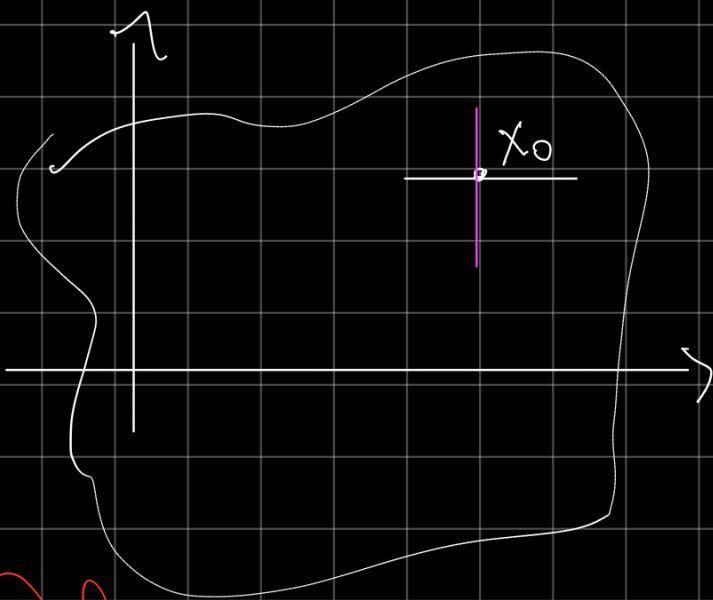
$$t \rightarrow \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^{k-1} \\ t \\ \vdots \\ x_0^m \end{pmatrix}$$

questo è un indice.

questa è una parametrizzazione

$$R_k: (-r, r) \rightarrow \Omega \quad t \rightarrow \begin{pmatrix} x_0^1 \\ x_0^{k-1} \\ x_0^k + t \\ \vdots \\ x_0^m \end{pmatrix}$$

faccio piccole variazioni $< r$



indice = 1.

Se invece tengo costante la prima e muovo la seconda, mi muovo così

Def.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto, sia $x_0 \in \Omega$. Sia

inoltre $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Come precedentemente
introdotta notazione, Consideriamo

$$\tilde{f}_k: (x_0^k - r, x_0^k + r) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}_k = f \circ r_k$$

$$\tilde{f}_k^{(t)} = f(r_k(t)) \quad \text{mi sto restringendo in un intervallo aperto con valori in } \mathbb{R}$$

Allora se $\tilde{f}_k$ è derivabile in x_0^k , allora
si dice che f è parzialmente derivabile
nel punto x_0 rispetto alla k -esima
variabile. Tale derivata si denota

$$\text{allora con } D_k f(x_0), \quad \text{oppure } \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0),$$

$$\text{oppure anche } f_{x_k}(x_0)$$

OS Posta $\tilde{f}_k: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}_k = f \circ R_k$, allora

f è parzialmente derivabile in x_0 rispetto
alla k -esima variabile se e solo se $\tilde{f}_k$ è

derivabile in $\odot$ 

$$\varphi: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\bar{x} \in (a, b),$$

per definizione $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{\varphi(x) - \varphi(\bar{x})}{x - \bar{x}}$$

oppure posso vedere

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(\bar{x} + h) - \varphi(\bar{x})}{h}$$

per definizione $\mathbb{R}$

$$h(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{(x^2 + \bar{y}^2) - (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)}{x - \bar{x}}$$

Risposta incrementale,
varia solo la x, y separato.

Sarà derivabile in $\bar{x}$?

esiste la derivata rispetto a

solo x ? Se congelo una

variabile, si comporta come

una costante, e la sua

derivata è $\odot$.

$$\frac{\partial h}{\partial x} \left(\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \right) = 2\bar{x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} \left(\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} \right) = 2\bar{y}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 2x$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = 2y$$

$$h(x, y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = \varphi'(x), \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \psi'(y)$$

$$h(x, y) = e^{xy} = \exp(xy)$$

$$(e^{ax})' = a e^{ax}$$

exponentielle

$$D_1 h(x, y) = y \exp(xy)$$

$$D_2 h(x, y) = x \exp(xy)$$

$$h(x, y, z) = xyz$$

$$D_1 h(x, y, z) = yz$$

$$D_2 h(x, y, z) = xz$$

$$D_3 h(x, y, z) = xy$$

$$h(x, y) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{se } (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ 0 & \text{in } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$I? \quad D_1 h(0, 0), \quad D_2 h(0, 0)$$

$$\frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x}$$

$$\frac{\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) - 0}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x^2}}{x}$$

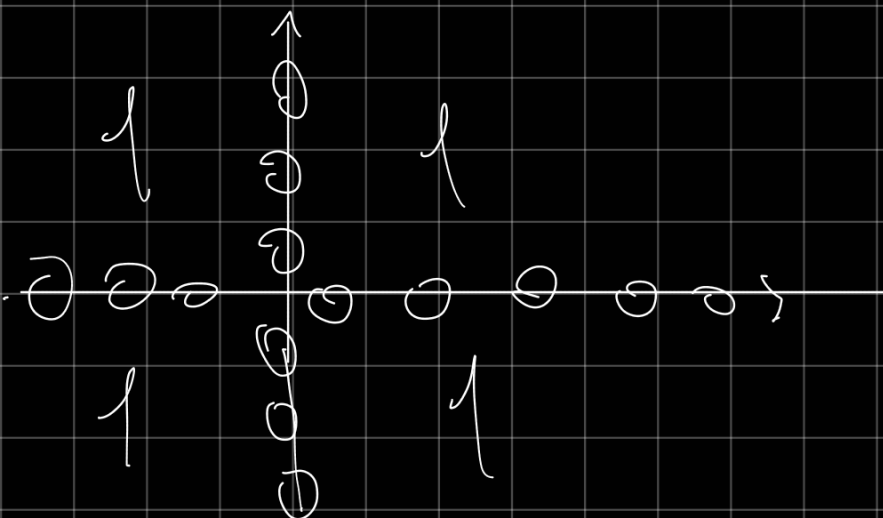
$$\frac{1}{x} = t$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t^2} \cdot t = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} u = 0$$

f è presidente derivabile nell'origine,
e la sua derivata è uguale a 0.

In una dimensione derivabilità $\Rightarrow$ continuità
in più dimensioni... no.



funzione discontinua,
es. origine. Ci possono
avvicinare l'origine una
successione che
converge all'origine

$$\text{Sia } (\vec{x}_n) \rightarrow \vec{0}, \quad \vec{x}_n = \begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \end{pmatrix}, \quad x_n^1 > 0$$

$$x_m^2 > 0$$

$$h(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$(h(\vec{x}_m)) = (1) \rightarrow 1 \neq h(0, 0) = 0$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto, $\vec{x} \in \Omega$, $\hat{v}$ versore di $\mathbb{R}^m$ (i.e. $\|\hat{v}\| = 1$).

$$\mathbb{R}^m, 1 \leq i \leq m$$

$\hat{e}_i$ è il versore che ha come i -esima

componente uguale ad 1, e tutte le altre

uguali a 0. Versori "principali", individuano

le direzioni degli assi principali

$$\mathbb{R}^2, \hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Def.

Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, Ω aperto, $\bar{x} \in \Omega$.

Sia inoltre $\hat{v}$ vettore di $\mathbb{R}^n$. Sia $r > 0$ così

piccolo t.c. $\forall t$ con $|t| < r$, Sia

$(\bar{x} + t \hat{v}) \in \Omega$. Poniamo.

$$\hat{f}_{\hat{v}}: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \hat{f}_{\hat{v}}(t) = f(\bar{x} + t \hat{v})$$

Dico che f è derivabile in $\bar{x}$ rispetto

alla direzione individuata dal vettore

$\hat{v}$ se $\hat{f}_{\hat{v}}$ è derivabile in 0.

$$\exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + t \hat{v}) - f(\bar{x})}{t} < +\infty$$

In tal caso, questa derivata si dice

Derivata Direzionale lungo $\hat{v}$ e si

denota con $\frac{df}{d\hat{v}}(\bar{x})$ 

OSS.

Se $\hat{v} = \hat{e}_i$, vettore principale, allora, se esiste, $\frac{\partial}{\partial \hat{e}_i} f(\bar{x}) = D_i f(\bar{x})$

derivate possibili come $\frac{\partial}{\partial \hat{v}}$ derivabile
particolare
dimensionali.

es.

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad v_1^2 + v_2^2 = 1$$

$$f(\bar{x} + t\hat{v})$$

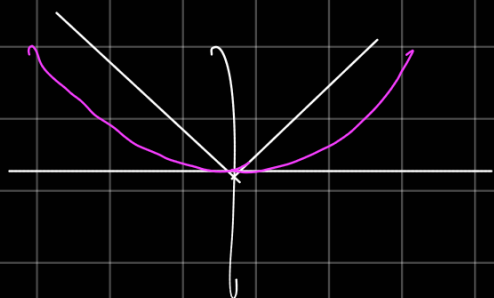
$$f(x + tv_1, y + tv_2) \quad \leftarrow \text{caso generale}$$

$$f(tv_1, tv_2) = \text{derivabile in } 0?$$

$$= \sqrt{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2} = \sqrt{t^2 (v_1^2 + v_2^2)} =$$

$$= \sqrt{t^2} = |t|$$

"Versione quilibrio" = 1



in 0 non è derivabile, perché
 $\partial_{sx} = -1$, $\partial_{dx} = 1$

$$h(x, y) = (x^2 + y^2)^p, \quad p > \frac{1}{2}$$

$$h(tv_1, tv_2) = (t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2)^p$$

$$t^{2p} (v_1^2 + v_2^2)^p = t^{2p} = t^{2p=q} \quad 2p = q > 1$$

$$|t|^{2p} = |t|^q$$

$$\underline{\partial_x = \partial_{x_i} = 0}$$

Def.

Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, Ω aperto, potenziale
derivabile in $\bar{x} \in \Omega$ rispetto a tutte le variabili.

Pongo $\nabla f(\bar{x}) = (D_1 f(\bar{x}), \dots, D_n f(\bar{x}))$
gradiente

($\rightarrow$ vettore riga con tutte le componenti: una derivata parziale

$\rightarrow$ e lo chiamo GRADIENTE di f
 in $\bar{x}$ (o NABLA)

Teorema

Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, Ω aperto.

Esistono in Ω le derivate parziali

$D_1 h, \dots, D_n h$ e siano anche

continue. Allora $\forall \hat{v}$ vettore di $\mathbb{R}^n$ e $\forall x \in \Omega$,

Il $\frac{dh}{d\hat{v}}(x)$ e vale la seguente eq

representazione

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\frac{dh}{d\hat{v}}(x) = \sum_{i=1}^n v_i D_i h(x) =$$

$$= \left\langle \left(\nabla h(x) \right)^T, \hat{v} \right\rangle =$$

$$= \nabla h(x) \cdot \hat{v} \quad \square$$

$\leadsto$ Tipo una
matrice (1×1) .

isomorfo con $\mathbb{R}$

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{se } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{in } \vec{0} \end{cases}$$

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(t v_1, t v_2) - h(0, 0)}{t} =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 v_1^2 - t v_2}{(t^4 v_1^4 + t^2 v_2^2) t} = \frac{v_1^2 v_2 / v_2^2}{\frac{v_1^2}{v_2}} = \frac{v_1^2}{v_2}$$

$(v_1^2 + v_2^2) = 1$

Se $v_2 \neq 0$

$= 0$ se $v_2 = 0$

In questo caso non vale la $\sum_{i=1}^n v_i D_i f(x)$

$$D_1 h(\vec{0}) = 0 \quad D_2 h(\vec{0}) = 0$$

Allora $D_1 h(\vec{0}) \cdot v_1 + D_2 h(\vec{0}) \cdot v_2 =$

$$0 \neq \frac{dh}{d\hat{v}}(\vec{0}) \text{ tutte le volte che}$$

$$\hat{v} \neq \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ +1 \end{pmatrix}$$

Una o più ipotesi del
teorema non vale,
l'ipotesi che manca è
la loro continuità,

esistono in tutto $\mathbb{R}^2$, ma nell'origine
no.

Se ho derivate parziali in ogni direzione,
non è detto che la f. è continua.

da generalizzare della continuità, non sono
gli DIFFERENZIABILI vero.

Defn

Sia $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, Sia $\bar{t} \in (a, b)$.

La funzione γ si dice differenziabile
in $\bar{t}$ se esiste un $d \in \mathbb{R}$ e c

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}} \left[\frac{\gamma(t) - \gamma(\bar{t}) - d \cdot (t - \bar{t})}{t - \bar{t}} \right] = 0$$

Prop.

1) Se γ è differenziabile in $\bar{t}$, allora
 d è unico, e coincide con $\gamma'(\bar{t})$

