

Massimi e minimi di funzioni su curve e superfici

Prendiamo la funzione $f(x,y) := x^2y - y^2$

cerchiamo massimi e minimi di f su

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Scegliamo una parametrizzazione di S^1

$$\gamma: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

γ è una curva regolare il cui sostegno è esattamente S^1 .

Cercare i pts di max e min di f su S^1
corrisponde a cercare i valori max e min di

$$f \circ \gamma(t) = f(\cos t, \sin t)$$

se t è un punto di max o minimo per $f \circ \gamma$

$\Rightarrow (\cos t, \sin t) \in S^1$ è un punto di max o
min (rispettivamente) per f su S^1

Nell'esempio specifico $f(\gamma(t)) = \cos^2 t \sin t - \sin^2 t$
cerca i pts critici di questa funzione su $(0, 2\pi)$

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = -2\cos t (\sin t)^2 + (\cos t)^2 \cos t - 2\sin t \cos t$$

che si annulla nei punti $t \in [0, 2\pi)$ per i quali

$$\cos t (-2(\sin t)^2 + \cos^2 t - 2\sin t) = 0$$

$$\cos t = 0 \iff t = \frac{\pi}{2} \text{ o } t = \frac{3\pi}{2}$$

$$-2\sin^2 t + \cos^2 t - 2\sin t = 0$$

$$-2\sin^2 t + 1 - \sin^2 t - 2\sin t = 0$$

$$-3\sin^2 t - 2\sin t + 1 = 0$$

$$-3\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \iff \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin t = -1$$

$$\sin t = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$

$$t = \frac{3}{2}\pi$$

$$t = \arcsin \frac{1}{3}$$

$$t = \pi - \arcsin \frac{1}{3}$$

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 0 \text{ o s.b.o. } t \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \arcsin \frac{1}{3}, \arcsin \frac{1}{3} + \pi \right\}$$

per determinare se ha massimi o minimi relativi
calcola la derivata 2°

$$\frac{d}{dt} (\cos(-3\sin^2 t - 2\sin t + 1))$$

$$= -\sin t (-3\sin^2 t - 2\sin t + 1) + \cos t (-6\sin t \cos t - 2\cos t)$$

$$\text{in } t_1 = \frac{\pi}{2} \quad (f \circ \gamma)''(t_1) = 4 > 0$$

t_1 è un minimo relativo

$$t_2 = \frac{3\pi}{2} \quad (f \circ \gamma)''(t_2) = 0$$

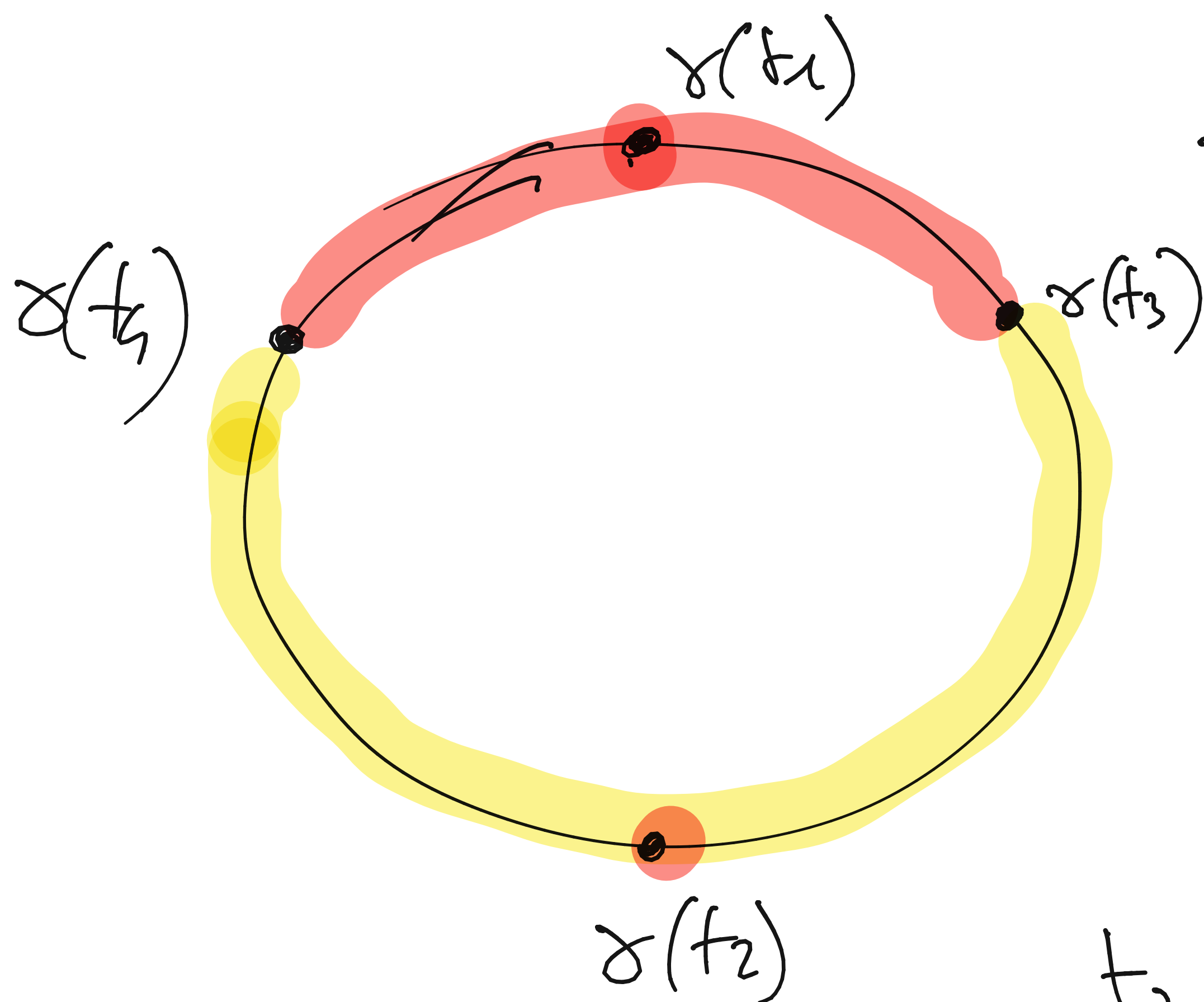
non è determinata

$$t_3 \text{ e } t_4 = \arcsin \frac{1}{3}, \arcsin \frac{1}{3} + \pi$$

$$(f \circ \gamma)''(t_3) = (f \circ \gamma)''(t_4) < 0$$

Controllare

$\Rightarrow$ minimi relativi



$$t_1 = \frac{\pi}{2} \text{ corrisponde a}$$

$$\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1)$$

$\gamma(t_1)$ è di minimo relativo

$$t_2 = \frac{3}{2}\pi$$

$$t_3 = \arcsin \frac{1}{3}$$

$$t_4 = \pi - \arcsin \frac{1}{3}$$

$$f(\gamma(t_4)) = f(\gamma(t_3))$$

Calcolando il valore di f in

$$\gamma(t_2) \Rightarrow f(\gamma(t_2)) = -1$$

confrontando tale valore con $f(\gamma(t_3))$

$$\text{e } f(\gamma(t_4)) \quad \gamma(t_3) = \left(\sqrt{1 - \frac{1}{9}}, \frac{1}{3} \right)$$

$$\gamma(t_4) = \left(-\sqrt{1 - \frac{1}{9}}, \frac{1}{3} \right)$$

$$f(\gamma(t_3)) = \left(1 - \frac{1}{9}\right) \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = f(\gamma(t_2))$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{27} - \frac{1}{9} > 0$$

$$\text{Essendo } f(\gamma(t_2)) = -1 < f(\gamma(t_3)) = f(\gamma(t_2))$$

Scopro che $\gamma(t_2)$ è un min (assoluto)

nell'arco globale con vertici $\gamma(t_3)$ e $\gamma(t_2)$
e quindi $\gamma(t_2)$ è min relativo in S^1

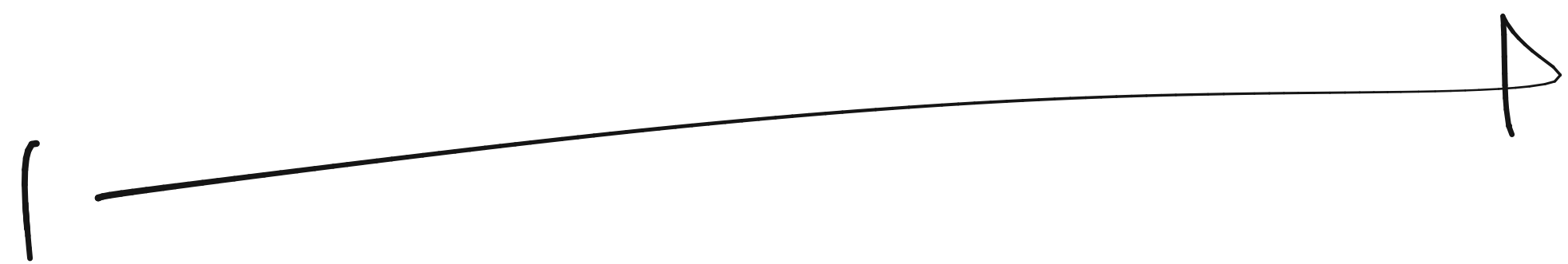
In $\gamma(t_1)$ non è un min relativo
(per lo stesso motivo di $\gamma(t_2)$)

è un min assoluto nell'arco rosso

quindi confronta $f(\gamma(t_1))$ con $f(\gamma(t_2))$

$\begin{matrix} \parallel & \parallel \\ -1 & -1 \end{matrix}$

quindi essendo uguali non sono minimi assoluti
di f in S^1 . $\Rightarrow \gamma(t_3)$ e $\gamma(t_2)$ non sono minimi
assoluti.



Se vi chiedo di calcolare max e min relativi
di f sul luogo di punti

$$P = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^2 - 2y + 1 = 0 \right\}$$

chi c'è ancora che Γ può essere visto
come sostegno di una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$

Teo (Dimi) Sia $F: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

supponiamo $F \in C^1(A)$ e consideriamo l'insieme

$$\Gamma = \{ (x, y) \in A : F(x, y) = 0 \}$$

Sia $(x_0, y_0) \in \Gamma$ ($\Leftrightarrow (x_0, y_0) \in A$ A.c. $F(x_0, y_0) = 0$)

e supponiamo che $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Allora $\exists$ un intorno I di x_0 e un intorno J di y_0 tali che $\forall x \in I \exists ! y \in J$ tale che

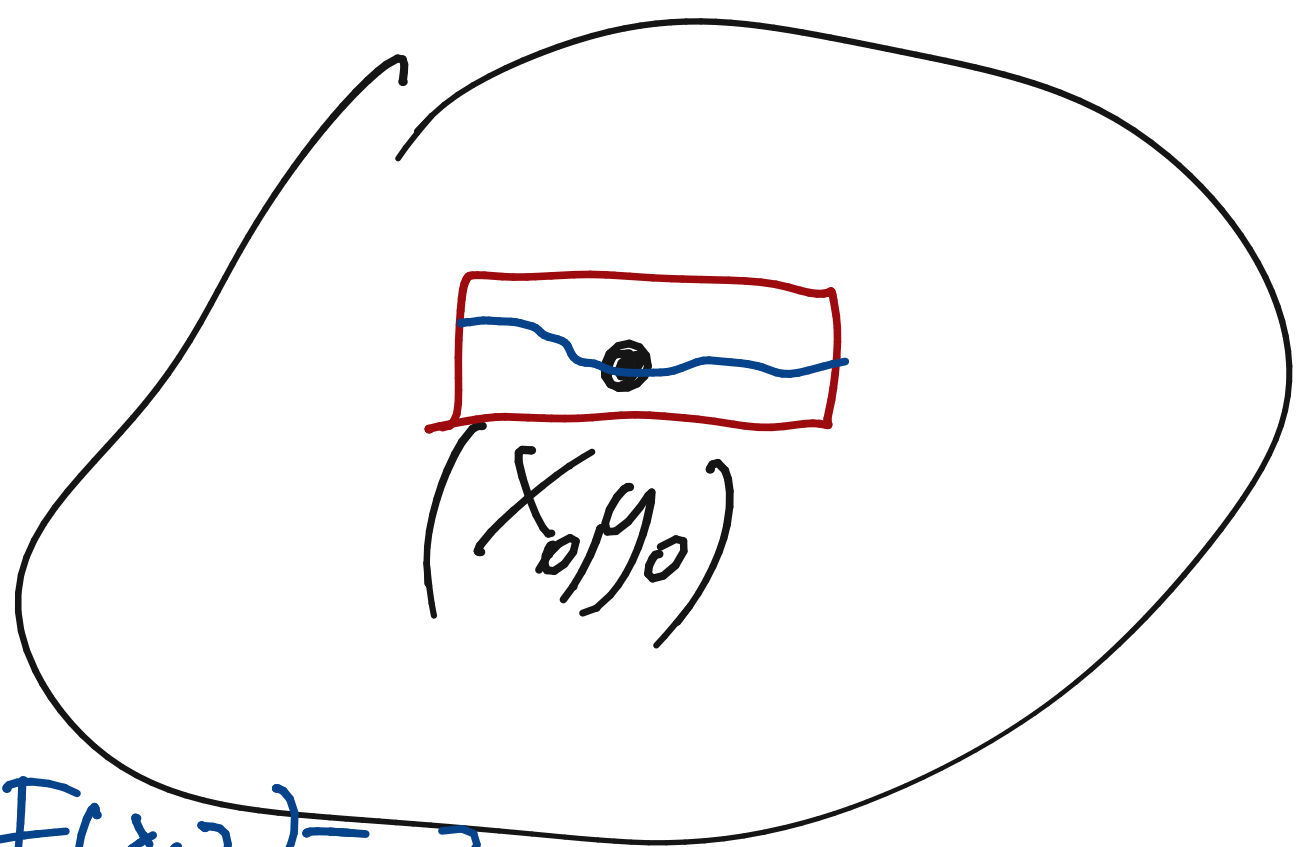
$$F(x, y) = 0. \quad \text{Quindi ponendo } y = g(x)$$

possiamo trovare una funzione $g: I \rightarrow J$ tale che
 $\forall x \in I \quad F(x, g(x)) = 0$.

Inoltre $g: I \rightarrow J$ è di classe $C^1(I)$
e soddisfa

$$\textcircled{*} \quad g'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))} \quad \forall x \in I$$

Oss.:



A

$(x_0, y_0) \in \Gamma$ A.c.

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

$$\Gamma = \{ (x, y) : F(x, y) = 0 \}$$

$I \times J =$ rettangolo centrato in (x_0, y_0)

Teo (Dimi pt.2) Se $F: A \rightarrow \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in A$

$$\text{e } \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0 \Rightarrow \exists g: J \rightarrow I \text{ t.c.}$$

$$\forall y \in J \quad (g(y), y) \in A \text{ e}$$

$$g'(y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(g(y), y)}{\frac{\partial F}{\partial x}(g(y), y)} \quad \forall y \in J$$

dim. teorema pt 1 : $(x_0, y_0) \in A$ t.c.

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0. \quad \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \quad \text{supponiamo } \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) < 0$$

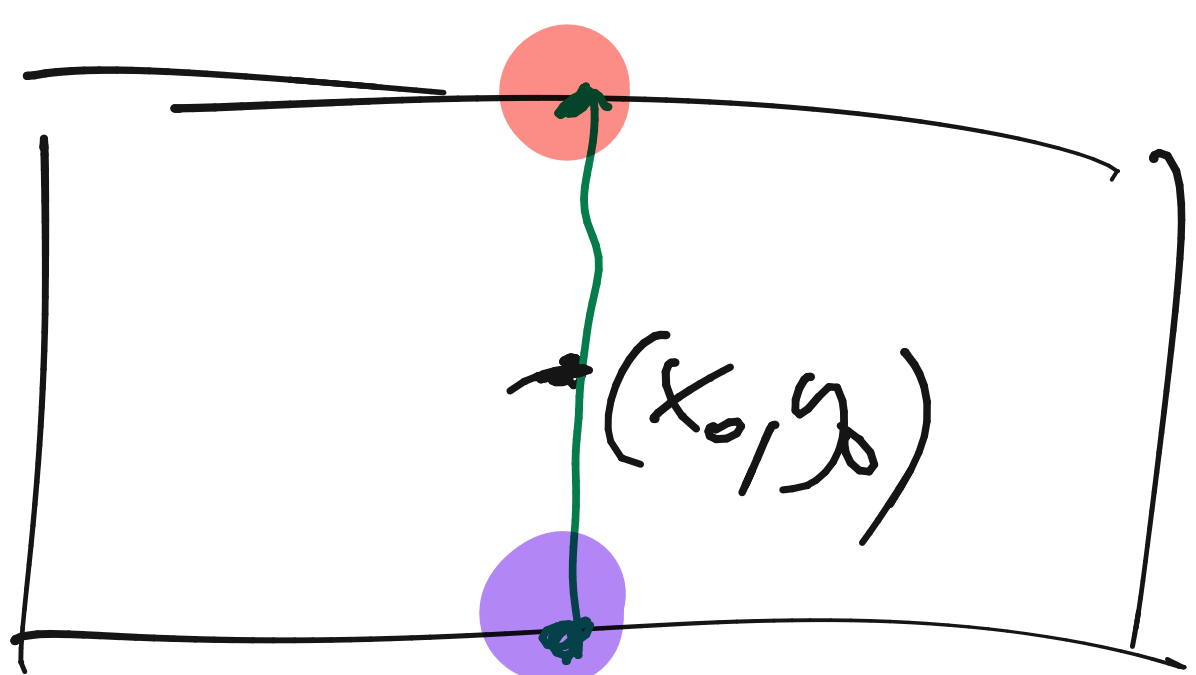
$$\exists I \text{ intorno di } x_0 \quad I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad \delta > 0$$

$$\exists J \text{ intorno di } y_0 \quad J = (y_0 - \eta, y_0 + \eta) \quad \eta > 0$$

Adi che $I \times J$ è un intorno di (x_0, y_0)

$$\text{Addisfe } \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) < 0 \quad \forall (x, y) \in I \times J$$

Infatti $\frac{\partial F}{\partial y}$ è continua ed essendo negativa in (x_0, y_0) rimane tale in un intorno di (x_0, y_0) .



Considero la funzione
 $F(x, y_0 + \eta)$ con $x \in I$

Essendo $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) < 0$ la funzione

$y \mapsto F(x_0, y)$ è strettamente decrescente

$F(x_0, y_0) = 0$ per hp $y = y_0 + h$ ho

che $F(x_0, y_0 + h) < 0$

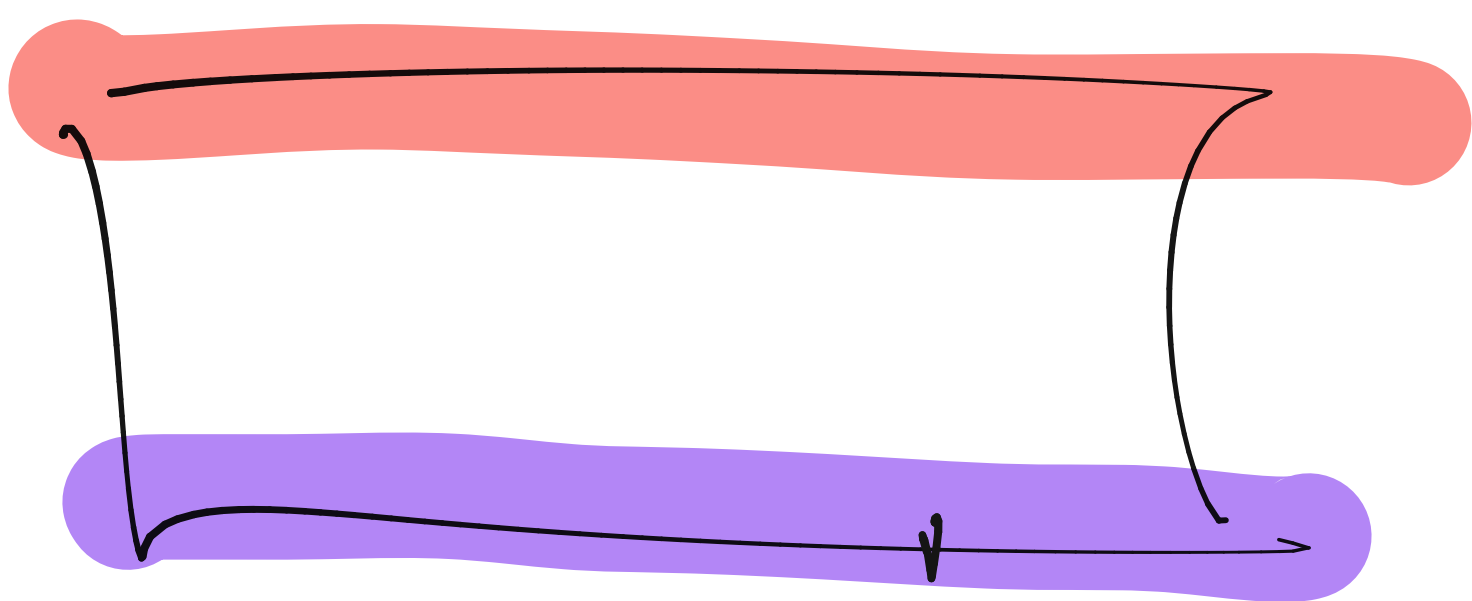
(In modo analogo $F(x_0, y_0 - h) > 0$)

Ama di scegliere I più piccolo passo

Supporre che $F(x, y_0 + h) < 0 \quad \forall x \in I$

In modo analogo possiamo supporre che

$F(x, y_0 - h) > 0 \quad \forall x \in I$



$F < 0$

$F > 0$

$\boxed{\forall x \in I}$

x

considero la funzione $y \in J \rightarrow \mathbb{R}$

$y \mapsto F(x, y)$ e ho appena mostrato che tale

funzione è positiva in $y = y_0 - h$

e negativa in $y = y_0 + h$

Ma è inoltre strettamente decrescente

$\Rightarrow \exists! y \in J$ tale che

$$F(x, y) = 0$$

Abbiamo mostrato che $\forall x \in I \quad \exists! y \in J$
t.c. $F(x, y) = 0$. Chiamo $y = g(x)$

dove $g: I \rightarrow J$.

Facciamo vedere che $g \in C^1(I)$ e
ne derivato che soddisfa la formula $(*)$

Fissiamo $x_1, x_2 \in I$ e consideriamo la

funzione $H(t) = F(x_1 + t(x_2 - x_1), g(x_1) + t(g(x_2) - g(x_1)))$
 $t \in [0, 1]$

La funzione $H: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ soddisfa

$$H(0) = F(x_1, g(x_1)) = 0$$

$$H(1) = F(x_2, g(x_2)) = 0$$

F' continua (perché composizione di f. continue)

e derivabili $H'(t) = \frac{d}{dt} F(x_1 + t(x_2 - x_1), g(x_1) + t(g(x_2) - g(x_1)))$

$$= \frac{\partial F}{\partial x}(x_1 + t(x_2 - x_1), g(x_1) + t(g(x_2) - g(x_1))) (x_2 - x_1)$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial y}(x_1 + t(x_2 - x_1), g(x_1) + t(g(x_2) - g(x_1))) (g(x_2) - g(x_1))$$

Teo Rolle $\Rightarrow \exists \tau \in [-1, 1]$ t.c.

$$H'(\tau) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial F}{\partial x} \left(x_1 + \tau(x_2 - x_1), g(x_1) + \tau(g(x_2) - g(x_1)) \right) (x_2 - x_1) \\ + \frac{\partial F}{\partial y} \left(x_1 + \tau(x_2 - x_1), g(x_1) + \tau(g(x_2) - g(x_1)) \right) [g(x_2) - g(x_1)]$$

$$\xi_1 = x_1 + \tau(x_2 - x_1) \quad \xi_2 = g(x_1) + \tau(g(x_2) - g(x_1))$$

$$g(x_2) - g(x_1) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(\xi_1, \xi_2)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\xi_1, \xi_2)} (x_2 - x_1) \quad \text{(**)}$$

dato con $M = \min_{(x,y) \in \overline{I \times J}} \left| \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \right| > 0$

$$m = \max_{(x,y) \in \overline{I \times J}} \left| \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \right|$$

La formula ~~(**)~~ mi dice che

$$|g(x_2) - g(x_1)| \leq \frac{m}{M} |x_2 - x_1|$$

essendo $\frac{m}{M} \in \mathbb{R}^+$ scopro che g è
Lipschitziana di costante $\frac{m}{M} \Rightarrow$ continua

Essendo continua dalle ~~(**)~~ si può

$$\frac{g(x_2) - g(x_1)}{(x_2 - x_1)} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\xi_1, \xi_2)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\xi_1, \xi_2)}$$

se $x_2 \rightarrow x_1$ allora

$$g'(x_1) = \dots$$

$$\xi_1 = x_1 + \tau(x_2 - x_1)$$

$$\xi_2 = g(x_1) + \tau(g(x_2) - g(x_1))$$

$$\tau \in [0, 1]$$

quindi $x_2 \rightarrow x_1$

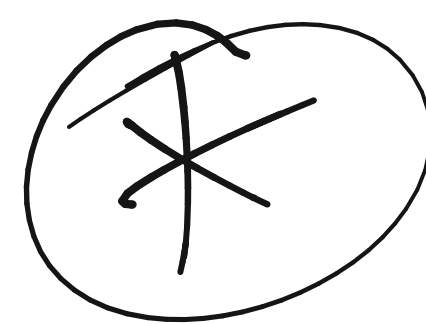
$$\xi_1 \rightarrow x_1$$

$$\xi_2 \rightarrow g(x_1)$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1} - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\xi_1, \xi_2)}{\frac{\partial F}{\partial y}(\xi_1, \xi_2)} \rightarrow$$

$$- \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_1, g(x_1))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, g(x_1))}$$

$$g'(x_1) = \frac{- \frac{\partial F}{\partial x}(x_1, g(x_1))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, g(x_1))} \Leftrightarrow$$



g è derivabile e vale la (*)

e $g'(x_1)$ è continua (lo dice la *)

□

Teorema (Dimi parte 2)

Supponiamo $A \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto e sia $(x_0, y_0, z_0) \in A$
e sia $F: A \rightarrow \mathbb{R}$ tale che s.e. di classe $C^1(A)$ e

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad . \quad \text{Se } \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

$\exists$ un intorno di (x_0, y_0, z_0) delle forme $I \times J \times H$
dove $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $J = (y_0 - \eta, y_0 + \eta)$ $H = (z_0 - h, z_0 + h)$
tale che $\forall (x, y) \in I \times J \quad \exists! z \in H$ tale che

$$F(x, y, z) = 0 \quad . \quad \text{Denotando } z = g(x, y) \text{ risulta che}$$

$$g: I \times J \rightarrow H \quad \text{è di classe } C^1(I \times J) \quad \text{e } \forall (x, y) \in I \times J$$

si ha

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, g(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, g(x, y))}$$

Se supponiamo per esempio che $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$
un teorema simile vale (enunciato scambiando le x
con le z)

Se $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \Rightarrow$ teorema simile vale
scambiando il ruolo di y e z .

esempio $F(x,y) = x^2 - y^2$ e prendo

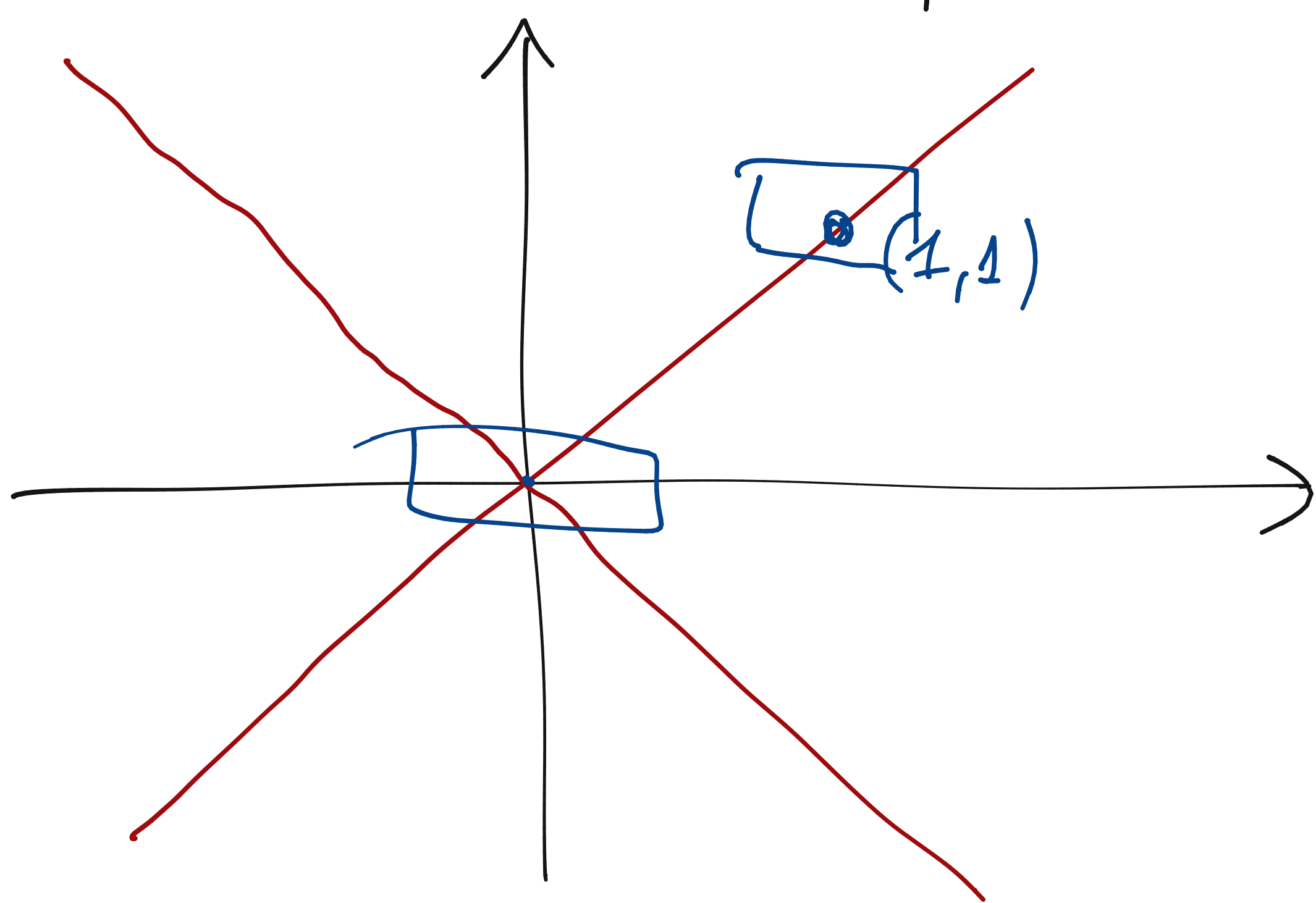
$$\Gamma = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) = 0 \} \ni (0,0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -2y$$

nel punto $(0,0)$ si ha $\nabla F(0,0) = (0,0)$

Non sono nelle ipotesi del teorema del Dini



$$\begin{aligned} \Gamma &= \{ x^2 - y^2 = 0 \} \\ &= \{ (x-y)(x+y) = 0 \} \\ &= \{ (x,y) : x=y \} \cup \\ &\quad \{ (x,y) : x=-y \} \end{aligned}$$

Intorno all'origine il luogo Γ non
è grafico di una funzione.

Nel caso in cui $(x_0, y_0) = (1, 1)$

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = -2 \neq 0$$

Considerando un punto $\Gamma = \{ F(x,y) = 0 \}$

$(x_0, y_0) \in \Gamma$ tale che $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$

posso applicare il teorema del Dini

$\Rightarrow$ in un intorno di (x_0, y_0)

Γ coincide con il sostegno di una curva regolare. Infatti $\Gamma = \{(x, y) : y = g(x)\}$
in un intorno di $(x_0, y_0) \Rightarrow$

$\gamma(t) = (t, g(t))$ parametrizza il pezzo di Γ
quindi ha come sostegno esattamente Γ
(in un intorno di (x_0, y_0))

Oss.1 $\gamma'(t)$ è tangente a Γ

$\gamma'(x_0)$ è tangente a Γ nel punto (x_0, y_0)

Oss.2 $\gamma'(t) = \left(1, g'(t)\right) = \left(1, \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(t, g(t))}{\frac{\partial F}{\partial y}(t, g(t))}\right)$

$\gamma'(x_0) = \left(1, \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}\right)$ è tangente a Γ
in (x_0, y_0)

Oss.3 $\gamma'(x_0)$ è ortogonale a $\nabla F(x_0, y_0)$

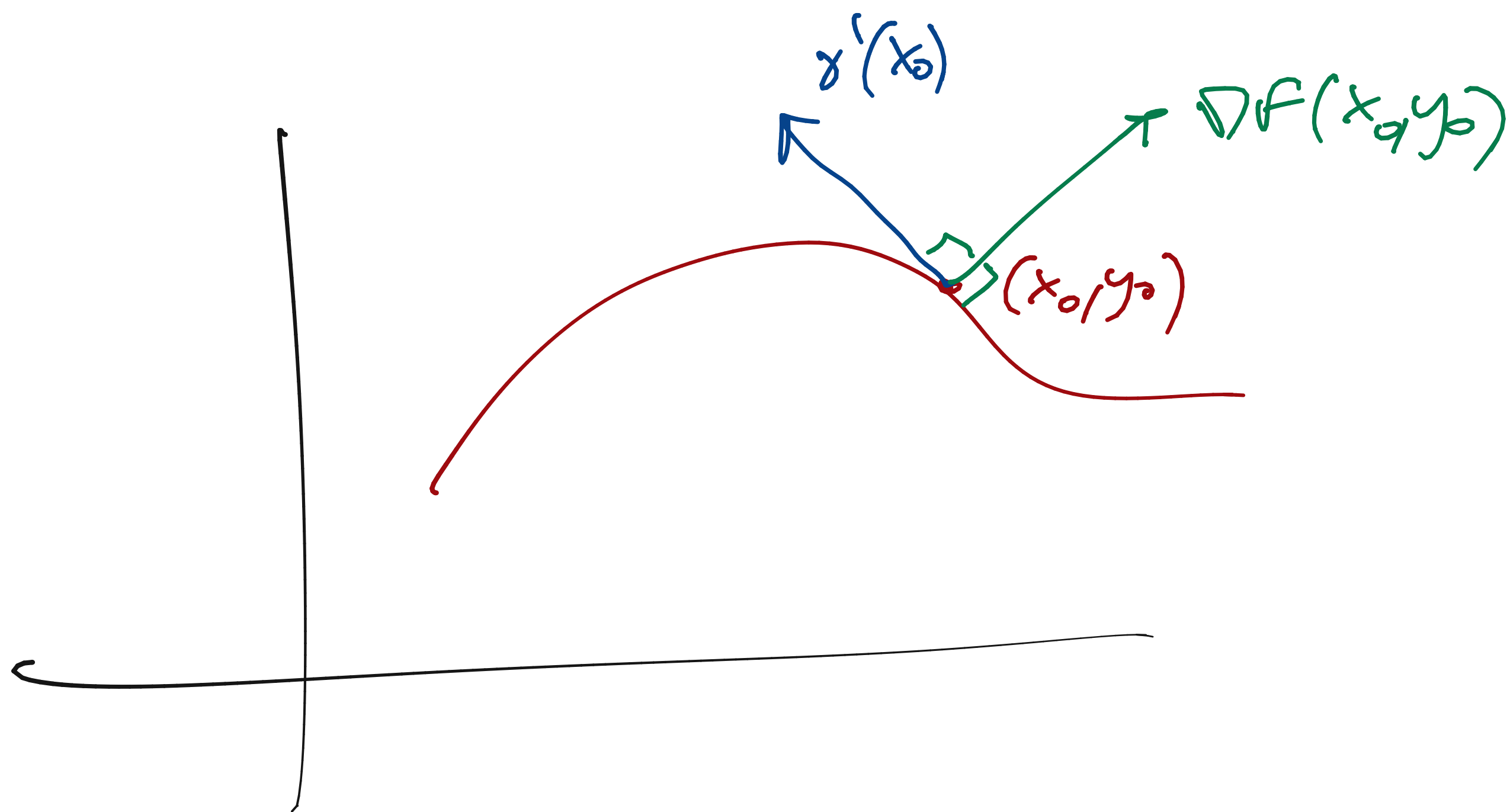
$$\gamma'(x_0) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right) =$$
$$= \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Conseguenza di oss. 2 e oss. 3

$$\gamma'(x_0) \parallel \Gamma \text{ in } (x_0, y_0)$$

$$\gamma'(x_0) \perp \nabla F(x_0, y_0)$$

$$\Rightarrow \nabla F(x_0, y_0) \perp \Gamma \text{ in } (x_0, y_0)$$



In maniera analoga si è $S = \{F(x, y, z) = 0\}$

e supponiamo $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$

Il teo Dim. pt. 2 dice che intorno a (x_0, y_0, z_0)

S è il sostegno di una superficie

$$\varphi: I \times J \rightarrow H \quad \varphi(x, y) = (x, y, g(x, y))$$

$$\text{Calcolo } \nabla \varphi(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

Sono due vettori tangenti a S in (x_0, y_0, z_0)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) = \left(1, 0, \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \right)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = \left(0, 1, \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

Il tensore del Hessiano $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) = \left(1, 0, \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) \perp \nabla F(x_0, y_0, z_0) \text{ in } \text{Infld}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}$$

$$= 0$$

Concludiamo che il vettore $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ tangente ad S in (x_0, y_0, z_0) è ortogonale a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$

Similmente $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \perp \nabla F(x_0, y_0, z_0)$

$\Rightarrow \nabla F(x_0, y_0, z_0)$ è ortogonale al piano tangente ad S nel punto (x_0, y_0, z_0)

$\Rightarrow \nabla F(x_0, y_0, z_0)$ è ortogonale ad S in (x_0, y_0, z_0)

Teo Se $S = \{F(x, y, z) = 0\}$ e

$$(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma \quad \text{con} \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

$$\Rightarrow \nabla F(x_0, y_0, z_0) \perp S \quad \text{in} \quad (x_0, y_0, z_0)$$

Se $\Gamma = \{F(x, y) = 0\}$ e $(x_0, y_0) \in \Gamma$ con

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla F(x_0, y_0) \perp \Gamma.$$

Problema di trovare
max e min di $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ su
un vincolo $S = \{F(x, y, z) = 0\}$

Se $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$ e S ammette una
parametrizzazione (ovvero S è il sostegno di
una superficie $\varphi: A \rightarrow \mathbb{R}^3$) allora
cerchiamo i max e min della funzione
composta $f(\varphi(u, v))$ in $(u, v) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$

Condizione necessaria affinché il punto $\varphi(u_0, v_0)$
sia un punto di max o min per f su S
è che $f(\varphi(u, v))$ ammetta (u_0, v_0) come
punto critico $\Leftrightarrow \nabla (f \circ \varphi)(u_0, v_0) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial u} f \circ \varphi(u_0, v_0) = 0 = \frac{\partial}{\partial v} f \circ \varphi(u_0, v_0)$$

$$\begin{cases} \nabla f(\varphi(u_0, v_0)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) = 0 \\ \nabla f(\varphi(u_0, v_0)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \perp \nabla f(\varphi(u_0, v_0))$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \perp \nabla f(\varphi(u_0, v_0))$$

$\nabla f(\varphi(u_0, v_0))$ è ortogonale alla superficie S

nel punto $\varphi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$

$$\text{e } S = \{ F(x, y, z) = 0 \}$$

$$\Rightarrow \nabla F(x_0, y_0, z_0) \perp \text{ alla superficie } S \text{ in } (x_0, y_0, z_0)$$

Condizione $\Rightarrow \nabla f(x_0, y_0, z_0) \parallel \nabla F(x_0, y_0, z_0)$

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla F(x_0, y_0, z_0)$$

Teorema (Moltiplicatori di Lagrange)

Supponiamo $A \subseteq \mathbb{R}^3$ e $S = \{F(x, y, z) = 0\}$

e supponiamo che $\nabla F(x, y, z) \neq 0 \quad \forall (x, y, z) \in S$

dove $F \in C^1(A)$. Se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

è di classe $C^1(A)$ allora condizione

necessaria affinché f ammetta un max

o minimo relativo su S nel punto (x_0, y_0, z_0)

è che $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lambda \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \lambda \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \lambda \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ F(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases}$$

Similmente se $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $\Gamma = \{F(x, y) = 0\}$

con $F \in C^1(A)$ e $\nabla F(x, y) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma$

Condizione necessaria affinché $f \in C^1(A)$

ammetta max - min su Γ nel punto (x_0, y_0)

è che $\exists \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lambda \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lambda \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \\ f(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Equivalentemente $(x_0, y_0, z_0, \lambda) \in \mathbb{R}^4$ deve essere un pto critico della funzione

$$H(x, y, z, \lambda) = \lambda F(x, y, z) - f(x, y, z)$$

Esempio prendiamo la funzione

$$f(x, y, z) = x^2 - 2y + z \quad \text{e cerchiamo i max e min di } f \text{ su } S = S^2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\}$$

$$S = \{ F(x, y, z) = 0 \} \quad \text{dove } F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

$(x, y, z) \in S$ è un max o min rel se e

$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\begin{cases} \lambda \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \\ \lambda \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \\ \lambda \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \end{cases}$$

$$F(x, y, z) = 0$$

$$\begin{cases} 2\lambda x = 2x \\ 2\lambda y = -2 \\ 2\lambda z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (2\lambda - 2)x = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

So $\lambda = 1$

$$\begin{cases} 2x = 2x \\ 2y = -2 \\ 2z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ z = \frac{1}{2} \\ x^2 = 1 - 1 - \frac{1}{4} \end{cases}$$

NON Circle sol.

Let $x = 0$

$$\begin{cases} 2\lambda y = -2 \\ 2\lambda z = 1 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda y = -1 \\ \lambda z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 y^2 + \lambda^2 z^2 = 1^2$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{4} = \lambda^2$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = \frac{5}{4} \quad \begin{cases} \lambda_1 = \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \lambda_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\lambda y = -1 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ y_2 = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\lambda z = \frac{1}{2} \quad \begin{cases} z_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ z_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Le soluzioni sono $(\lambda_1, x_1, y_1, z_1) = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, 0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$$(\lambda_2, x_2, y_2, z_2) = \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in S$$

$$\left(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$P_2 = \left(0, \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \in S$$

Consideriamo necessariamente il max
e min conditi di f in S

$$f(P_1) \leq f(P_2) \quad ?$$

esempio

$f(x, y) = x^2 + 2y^2$ e cerchiamo i max e min
di f in $\Gamma = \{F(x, y) = 0\}$

$$F(x, y) = 2x - y + 1$$

Moltiplicatori di Lagrange

$$\begin{cases} \lambda \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \lambda \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{cases} \quad F(x, y) = 0$$

$$\begin{cases} 2\lambda = 2x \\ -\lambda = 4y \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ l'unico pt
critico

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{4}{9}, -\frac{1}{9}\right)$$

CONTROLLER

f' ha un minimo esatto

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 \longrightarrow +\infty$$

$$(x, y) \longrightarrow +\infty$$

Se x_n e y_n sono coordinate tali che

$$|x_n| \longrightarrow +\infty \quad \text{e} \quad |y_n| \longrightarrow +\infty \quad \text{quando } n \longrightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow f(x_n, y_n) \longrightarrow +\infty$$

Se invece di calcolare il minimo (o max)
su S lo calcoliamo su $S \cap \overline{B_R(0,0)}$

$$\Rightarrow S \cap \overline{B_R(0,0)} \text{ è compatto}$$

$\Rightarrow$ f ammette max e min esatti su

$$S \cap \overline{B_R(0,0)} \quad \forall R > 0.$$

$$f(x_0, y_0) = m \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall R > 0$$

$$\bar{x} \text{ tale che } S \cap \overline{B_R(0,0)} \ni (x_0, y_0) \\ \Rightarrow \min \{ f(x, y) : (x, y) \in S \cap B_R \} \leq m$$

$$\exists \bar{R} > 0 \text{ t.c. } f \text{ su } S \cap B_{\bar{R}}$$

$$\underline{f} > m$$

$$\Rightarrow \text{Se } (\bar{x}, \bar{y}) \text{ è il punto di minimo} \\ \text{di } f \text{ su } \underline{S \cap B_{\bar{R}}}$$

$$\Rightarrow f(\bar{x}, \bar{y}) \leq m$$

$$\Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \text{ è il minimo globale} \\ \text{su } A \cup H \cup S.$$

$$f: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{continue}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(C) \quad (\text{con } C \subseteq \mathbb{R} \text{ chiuso})$$

$\bar{x}$ supere chiuso

Indolati

$$\text{Sic } x_n \in f^{-1}(C) \text{ t.c. } x_n \rightarrow x$$

$$\Rightarrow f(x_n) \in C$$

$$\text{dalle cond. globali } f(x_n) \rightarrow f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) \in C$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(c)$$

D