

Successioni di funzioni

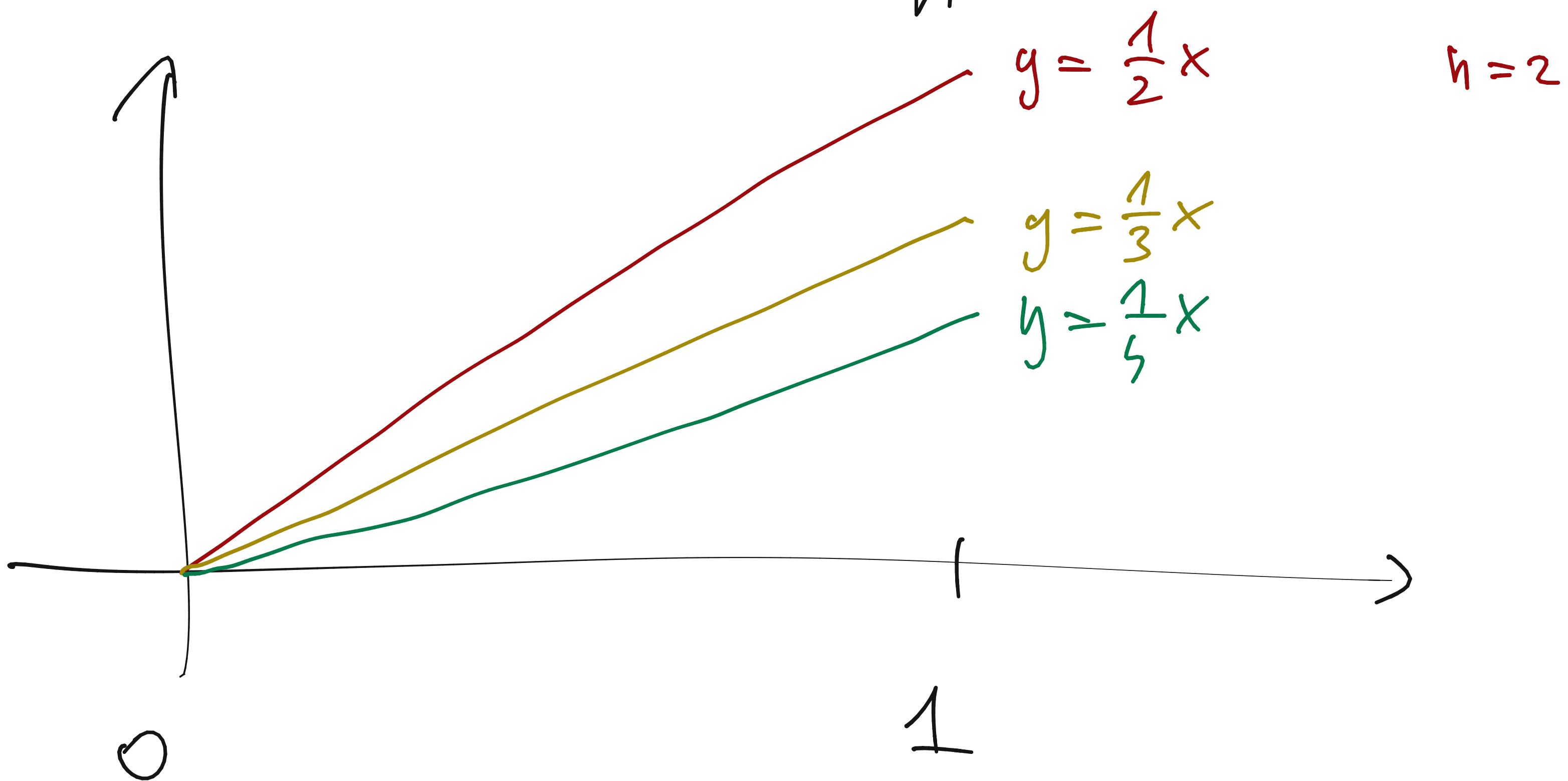
Sia $E \subseteq \mathbb{R}^m$ un dominio aperto. Una successione di funzioni è una famiglia di funzioni $f_n: E \longrightarrow \mathbb{R}^k$ dove $n \in \mathbb{N}$.

Definizione Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni $f_n: E \longrightarrow \mathbb{R}^k$ dove $E \subseteq \mathbb{R}^m$

Diciamo che f_n converge puntualmente ad una funzione $f: E \longrightarrow \mathbb{R}^k$ se $\forall x \in E$ la successione numerica $f_n(x) \in \mathbb{R}^k$ converge a $f(x) \in \mathbb{R}^k$.

Esempio 1 $\mathbb{R}^k = \mathbb{R}$ $k=1$ $E = [0, 1]$

e prendiamo $f_n: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$
definite come $f_n(x) = \frac{1}{n}x$



Chiamo $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = 0$
 $\forall x \in [0,1]$

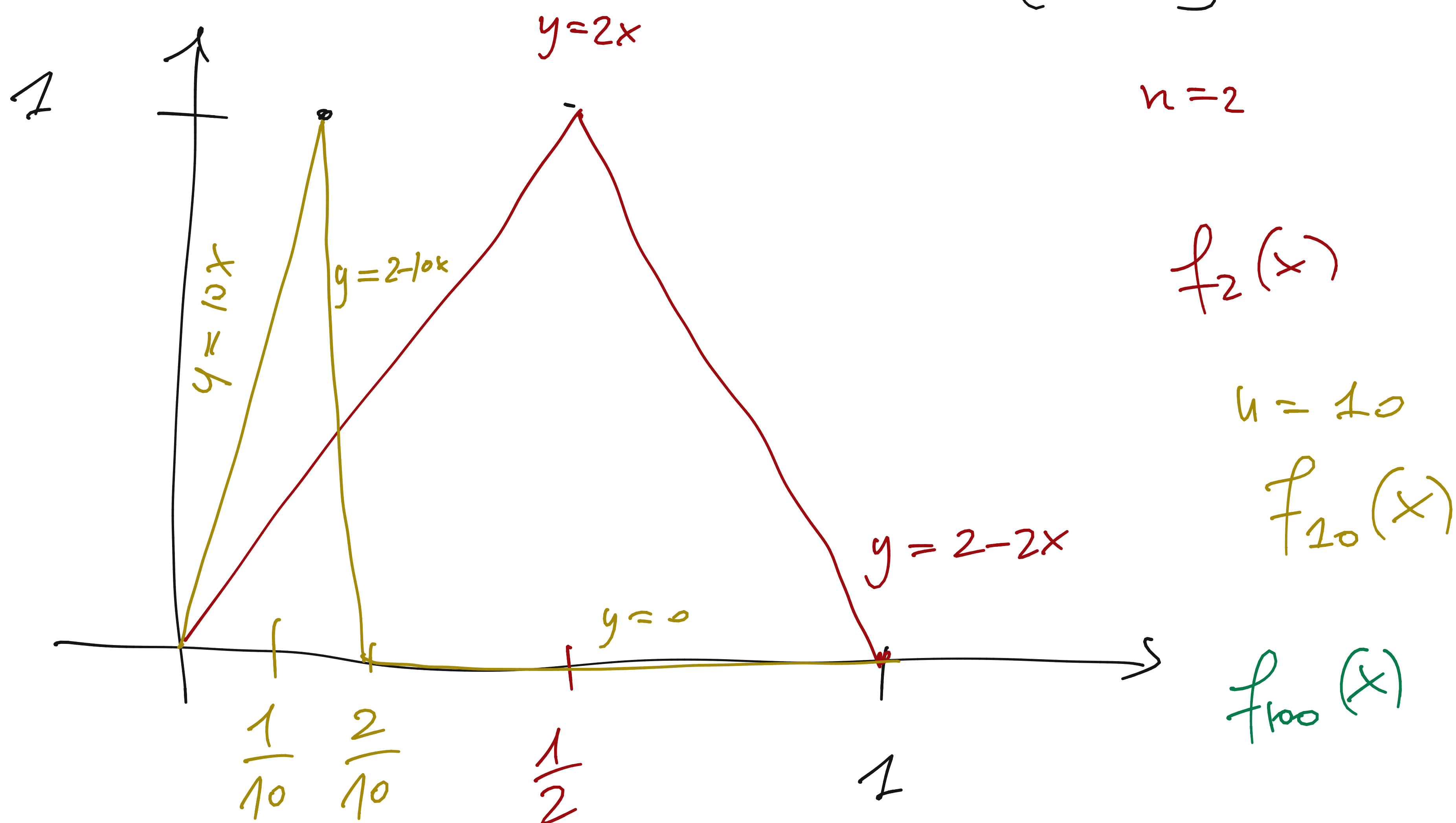
Allora $f_n \rightarrow f$ puntualmente.

$\forall x \in [0,1]$ accade che $f_n(x) \rightarrow f(x)$

$$f_n(x) = \frac{1}{n}x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 = f(x)$$

Esempio 2: su $[0,1]$ considero la funzione:

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 2-nx & x \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & x \in (\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$



$f_n(x) \rightarrow 0 \quad \forall x \in [0,1]$. Quindi:

$f_n \rightarrow f \equiv 0$ puntualmente

esercizio ($f_n(x) \rightarrow 0 \quad \forall x \in [0,1]$)

Def.: Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}^k$
una successione di funzioni.

Abbiamo detto che $f_n \rightarrow f$ puntualmente se $\forall x \in E$
 $f_n(x) \rightarrow f(x)$.

Convergenza puntuale

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon \\ \forall n \geq n_\varepsilon$$

Diremo che $f_n \rightarrow f$ uniformemente se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon \\ \forall x \in E$$

oss: La definizione di convergenza uniforme è
diversa dalle definizioni di convergenza puntuale
perché nella prima $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ non dipende da x
mentre nella puntuale $n_\varepsilon = n_\varepsilon(x)$ dipende da x
 $x \in E$

Esempio: nel caso dell'esempio 1 vediamo che

$f_n \rightarrow f \equiv 0$ uniformemente.

Dobbiamo verificare che $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\|f_n(x) - f(x)\| = |f_n(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad \forall x \in [0,1]$$

$$f_n(x) = \frac{1}{n}x$$

Dato $\varepsilon > 0$ prendiamo $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\boxed{\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon} \quad \left(\Leftrightarrow n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon} \right)$$

Così scelta di n_ε abbiamo che

$$0 \leq f_n(x) = \frac{1}{n}x \leq \frac{1}{n} \quad \text{se } n \geq n_\varepsilon \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$$

Ho mostrato che $\forall \varepsilon > 0$ posso scegliere n_ε in modo che $|f_n(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$.

Quindi $f_n \rightarrow f$ uniformemente

Nell'esempio 2 $f_n \not\rightarrow f \equiv 0$ uniformemente.

Supponiamo per assurdo $f_n \rightarrow f \equiv 0$ uniformemente

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } |f_n(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad \forall x \in [0,1]$$

per $\varepsilon = \frac{1}{2}$ trovato $n_{\frac{1}{2}} > 0$ t.c. $|f_n(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \geq n_{\frac{1}{2}} \quad \forall x \in [0,1]$

Si prende $x = \frac{1}{n}$ per definizione di f_n

$$f_n(x) = nx = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \not\leq \frac{1}{2} \quad \text{Assurdo}$$

Def.: Sia $f: E \rightarrow \mathbb{R}^k$ funzione assegnata
definiamo la norma ∞ di f la seguente
quantità

$$\|f\|_{\infty} := \sup \{ \|f(x)\| : x \in E \}$$

OCCHIO $\|f\|_{\infty}$ può far $+\infty$.

se $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\|f\|_{\infty} = \sup \left\{ \frac{1}{x} : x \in (0,1) \right\} = +\infty$$

Teorema Siano $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}^k$ funzioni
assegnate e sia $f: E \rightarrow \mathbb{R}^k$.

$f_n \rightarrow f$ uniformemente $\Rightarrow f_n \rightarrow f$ puntualmente

(il viceversa è falso come mostra l'esempio 2)

Inoltre $f_n \rightarrow f$ uniformemente se e solo

se $\|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$.

dim.: il fatto che $f_n \rightarrow f$ uniformemente

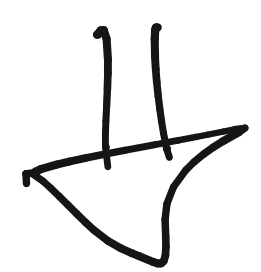
$\Rightarrow$ la convergenza $f_n \rightarrow f$ puntualmente è

ovvio. Dimostriamo che $f_n \rightarrow f$ unif. se e solo

se $\|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$ ^{quando} $n \rightarrow +\infty$.

Assumiamo $f_n \rightarrow f$ uniformemente. Allora $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists n_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon \\ \forall x \in E$$



$$\sup \{ \|f_n(x) - f(x)\| : x \in E \} \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$$

$$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$$

Abbiamo mostrato che $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon > 0$ t.c.

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty$$

Viceversa sappiamo $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$$

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \Rightarrow \forall x \in E \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$$

$$\left(\text{in generale } \|f_n(x) - f(x)\| \leq \|f_n - f\|_\infty \right) \\ \forall x \in E$$

Abbiamo mostrato che $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon > 0$ t.c.

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad \forall x \in E$$

ovvero $f_n \rightarrow f$ uniformemente.

□

OSS.: $\|\cdot\|_\infty$ è stata chiamata norma infinito

Def.: Sia $V = \{ f: E \rightarrow \mathbb{R}^k \text{ t.c. } f \text{ è limitata} \}$

dove $E \subseteq \mathbb{R}^m$.

Alora V è uno spazio vettoriale: infatti se
 $f, g \in V$ sono limitate $\Rightarrow \forall x \in E$

$$\|f(x)\| \leq M \quad \|g(x)\| \leq \bar{M}$$

$\alpha, \beta, d \in \mathbb{R}$ allora

$$\|d f(x) + \beta g(x)\| \leq \|d f(x)\| + \|\beta g(x)\|$$

$$= |\alpha| \|f(x)\| + |\beta| \|g(x)\|$$

$$\leq |\alpha| M + |\beta| \bar{M} \quad \forall x \in E$$

quindi $d f(x) + \beta g(x)$ è limitata.

Adesso $\|f\|_\infty$ è una norma su V .

Infatti:

$$(i) \quad \|f\|_\infty = 0 \iff f \equiv 0$$

$$(ii) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \|f\|_\infty$$

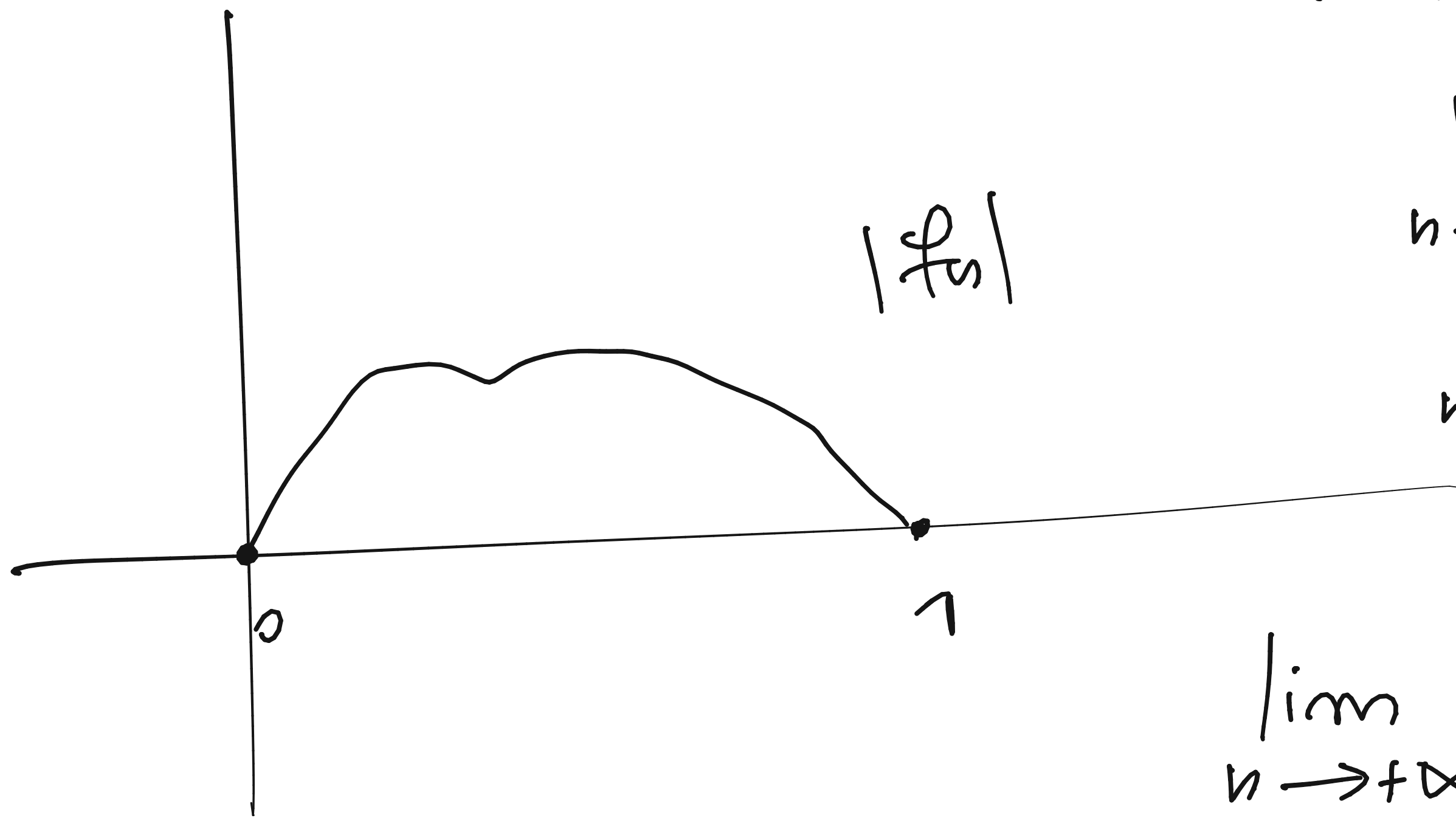
$$(iii) \quad \forall f, g \in V \quad \|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

esercizio verificare (i)-(ii)-(iii).

Esempio : Sia $f_n(x) := x^n(x-1)$ $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

studiamo convergenza puntuale e uniforme

$$f_n(x) = x^n(x-1) \quad \begin{cases} x=0 \Rightarrow f_n(0)=0 \\ x=1 \Rightarrow f_n(1)=0 \end{cases}$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(1) = 0$$

$$x \in (0,1)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n(1-x) = 0$$

$\Rightarrow f_n \rightarrow f \equiv 0$ puntualmente quando $n \rightarrow +\infty$

Studiamo convergenza uniforme

$f_n \rightarrow 0$ unif. $\Leftrightarrow \|f_n\|_\infty \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} \{ |f_n(x)| \} = \max_{x \in [0,1]} |f_n(x)|$$

$$|f_n(x)| = |x^n(x-1)| = x^n(1-x)$$

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= nx^{n-1}(1-x) - x^n = x^{n-1}(n-nx-x) \\ &= x^{n-1}(n-(n+1)x) \end{aligned}$$

la derivata si annulla in $x=0$ e anche

$$n - (n+1)x = 0 \Rightarrow x = \frac{n}{n+1}$$

$$\max_{x \in [0,1]} f_n(x) = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

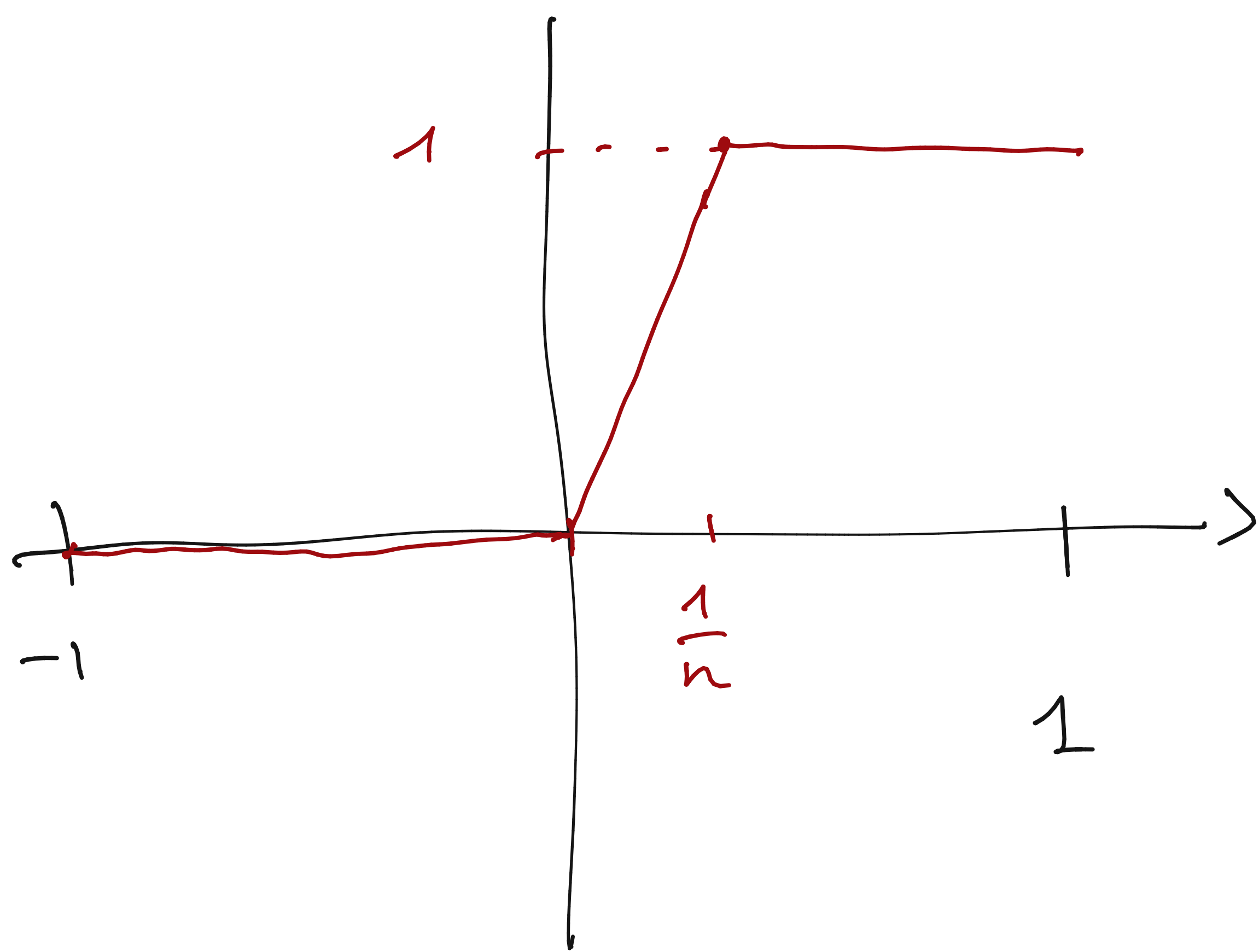
$$\Rightarrow \|f_n\|_\infty = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+1-n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}$$

quando $n \rightarrow +\infty$ ho che $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$

quindi concludiamo che $f_n \rightarrow f \equiv 0$ unif.

Teorema $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ sio funzioni continue
in E tali che $f_n \rightarrow f: E \rightarrow \mathbb{R}$ unif.
Allora f e' continua.

Esempio Siano $f_n: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definite
come $f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \underline{nx} & x \in (0, \frac{1}{n}] \\ 1 & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$



Si osserva facilmente
che $f_n \rightarrow f$
puntuale
dove

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Tuttavia $f_n \not\rightarrow f$ uniformemente.

esercizio verificare che $\|f_n - f\|_\infty \not\rightarrow 0$
quando $n \rightarrow +\infty$

d'altra conto fa solo continue quindi
per il teo precedente se $f_n \rightarrow f$ unif.
ci vorrebbe che f è continua.

Ma f è discontinua in 0.

dim. del teorema: Dobbiamo far vedere che
preso $x \in E$ la funzione $f = \text{limite uniforme}$
della f_n
è continua in x . Dobbiamo mostrare che

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. se } \|x - y\| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon}$$

Sappiamo che $f_n \rightarrow f$ uniformemente $\Rightarrow$
 $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$. Per $\varepsilon > 0$
fissato sappiamo che $\exists n_\varepsilon > 0$ t.c. se

$$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

in particolare se $n = n_\varepsilon$ ho che

$$|f_{n_\varepsilon}(y) - f(y)| \leq \|f_{n_\varepsilon} - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall y \in E$$

Sappiamo anche che f_{n_ε} è continua in $x \in E$
quindi $\exists \delta > 0$ t.c. $\|y - x\| \leq \delta \Rightarrow$

$$|f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Prendo y t.c. $\|y - x\| \leq \delta$ e trovo che

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_{n_\varepsilon}(x)| + |f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(y)| + |f_{n_\varepsilon}(y) - f(y)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ A.c. } |x-y| \leq \delta \Rightarrow$$

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

quindi f è continua in x .

□

Teorema 2 Se $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ con $E \subseteq \mathbb{R}$ rettangolo

e E misurabile secondo Peano-Jordan.

Supponiamo f_n integrabili su E e $f_n \rightarrow f$ uniformemente $\Rightarrow f$ è integrabile su E .

$$\text{e inoltre } \int_E f_n dx \rightarrow \int_E f dx.$$

Per dimostrare questo teorema abbiamo bisogno del seguente lemma

Lemma Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ un insieme misurabile secondo Peano-Jordan. Allora $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists g, h: E \rightarrow \mathbb{R} \text{ integrabili}$$

$$\text{tal. che } \int_E h(x) dx - \int_E g(x) dx \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall x \in E.$$

dim.: Supponiamo f integrabile $\Rightarrow$ esistono g, h

come sopra. Infatti basta prendere $g = h = f$

Mostriamo la viceversa. Supponiamo $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists g, h$ come sopra. Essendo $g, h: E \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili

esistono funzioni semplici φ_g, ψ_g e φ_h, ψ_h
sul $R \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$\varphi_g(x) \geq g(x) \chi_E(x) \geq \psi_g(x) \quad \forall x \in R$$

$$\Rightarrow \varphi_h(x) \geq h(x) \chi_E(x) \geq \psi_h(x)$$

inoltre $\varphi_h, \psi_h, \varphi_g, \psi_g$ sono semplici e

$$\int \varphi_h dx - \int \psi_h dx \leq \varepsilon \quad \int \varphi_g dx - \int \psi_g dx \leq \varepsilon$$

Essendo $g \leq f \leq h$ in E ho anche che

$$\Rightarrow \varphi_g(x) \leq f(x) \chi_E(x) \leq \varphi_h(x) \quad \forall x \in R$$

$$\begin{aligned} \int \varphi_h(x) dx - \int \psi_g(x) dx &= \int \varphi_h(x) dx - \int h(x) dx \\ &\quad + \int h(x) dx - \int g(x) dx \\ &\quad + \int g(x) dx - \int \psi_g(x) dx \end{aligned}$$

e adesso il primo termine $\leq \varepsilon$

$$\text{perch\u00e9 } \int \varphi_h - \int \psi_h \leq \varepsilon \quad \int \psi_h \leq \int h \leq \int \varphi_h$$

$$\text{Stesse cose per } \int g(x) dx - \int \psi_g(x) dx \leq \varepsilon$$

mentre il termine intermedio $\leq \varepsilon$ per ipotesi

$\Rightarrow$ abbiamo trovato che $\forall \varepsilon > 0 \exists$ funzioni
semplici $\varphi = \varphi_h$ e $\psi = \psi_g$ tali che

vale $\varphi \in \mathcal{F}^+$, $\psi \in \mathcal{F}^-$ e inoltre

$$\int \varphi dx - \int \psi dx \leq 3\varepsilon$$

$\bar{\mu}$ soddisfa le condizioni necessarie e sufficienti affinché f fosse integrabile su E .

□

Dim.: (teorema 2) Supponiamo che $f_n \rightarrow f$ unif.

quindi $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon > 0$ A.c. $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$

$\forall n \geq n_\varepsilon$.

Scrivo $f(x) = f(x) - f_n(x) + f_n(x)$

$$= f_n(x) + (f(x) - f_n(x))$$

$$\leq f_n(x) + \|f - f_n\|_\infty \quad \forall x \in E$$

$$\leq f_n(x) + \varepsilon \quad \text{per } n \geq n_\varepsilon$$

Allo stesso modo si trova

$$f(x) = f_n(x) + (f(x) - f_n(x))$$

$$\geq f_n(x) - \|f - f_n\|_\infty$$

$$\geq f_n(x) - \varepsilon$$

$$\forall x \in E \quad \forall n \geq n_\varepsilon$$

Abbiamo appena visto che $\forall \varepsilon > 0$ posso trovare due funzioni $g(x) = f_n(x) - \varepsilon$ e $h(x) = f_n(x) + \varepsilon$

tal che

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall x \in E$$

Osservo che $g = f_n - \varepsilon$ e $h = f_n + \varepsilon$ sono integrabili perché lo è f_n .

Infine

$$\begin{aligned}
 \int_E h(x) dx - \int_E g(x) dx &= \\
 &= \int_E (f_n(x) + \varepsilon) dx - \int_E (f_n(x) - \varepsilon) dx \\
 &= \int_E f_n(x) dx + \varepsilon m(E) - \int_E f_n(x) dx + \varepsilon m(E) \\
 &= 2\varepsilon m(E)
 \end{aligned}$$

Abbiamo trovato che $\forall \varepsilon > 0 \exists$ funzioni integrabili g, h come nel lemma precedente con

$$\int_E h - \int_E g \leq 2\varepsilon m(E)$$

$\Rightarrow$ il lemma ci dice che f è integrabile in E .

Mostrare che $\int_E f_n(x) dx \rightarrow \int_E f(x) dx$

dimostrare ciò equivale a mostrare che

$$\int_E f_n(x) dx - \int_E f(x) dx \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty$$

Mostriamo che

$$\left| \int_E f_n(x) - f(x) dx \right| \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty$$

$$\left| \int_E f_n(x) - f(x) dx \right| \leq \int_E |f_n(x) - f(x)| dx$$

$$\leq \int_E \sup_{x \in E} \{ |f_n(x) - f(x)| \} dx = \int_E \|f_n - f\|_\infty dx$$

$$= m(E) \cdot \|f_n - f\|_\infty \quad \text{questo tende}$$

a zero quando $n \rightarrow \infty \Rightarrow$

$$\left| \int_E f_n(x) - f(x) dx \right| \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \int_E f_n(x) dx \rightarrow \int_E f(x) dx$$

OSS: Abbiamo anche la disuguaglianza

$$\left| \int_E f dx \right| \leq \int_E |f| dx \quad \forall x \in E$$

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

$$\text{dove } f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$$

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

$$\int_E f(x) dx = \int_E f^+(x) - f^-(x) dx$$

$$\left| \int_E f(x) dx \right| = \left| \int_E f^+(x) dx - \int_E f^-(x) dx \right|$$

$$\leq \left| \int_E f^+(x) dx \right| + \left| \int_E f^-(x) dx \right|$$

$$= \int_E f^+(x) dx + \int_E f^-(x) dx$$

$$= \int_E f^+(x) + f^-(x) dx$$

$$= \int_E |f(x)| dx$$

perché

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x) \quad \forall x \in E$$

$$\begin{aligned}
 & |a+b| \leq |a| + |b| \\
 & |a-b| = |a+(-b)| \leq |a| + |-b| \\
 & \qquad \qquad \qquad = |a| + |b| \\
 & |a-b| \leq |a| - |b| \qquad b=2 \text{ e } a=1 \\
 & \qquad \qquad \qquad 1 \leq -1
 \end{aligned}$$

Proposizione Siano $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ s.c. funzioni limitate e $f_n \rightarrow f: E \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente. Anche f è limitata e $\|f_n\|_\infty \rightarrow \|f\|_\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$.

Dim.: f_n è limitata $\Rightarrow \|f_n\|_\infty = \sup_{x \in E} |f_n(x)| < +\infty$

Viceversa osservando che se g ha $\|g\|_\infty < +\infty$ allora g è limitata. (esercizio)

$$\|f\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n\|_\infty \quad (*)$$

quindi visto che $\|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$

$$\exists n_\varepsilon > 0 \text{ per cui } \|f - f_n\|_\infty \leq 1 \quad \forall n \geq n_\varepsilon$$

$$\|f\|_\infty \leq 1 + \|f_{n_\varepsilon}\|_\infty < +\infty \Rightarrow f \text{ è limitata}$$

prendiamo il limite per $n \rightarrow +\infty$ in (*)

$$\|f\|_{\infty} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} (\|f - f_n\|_{\infty} + \|f_n\|_{\infty})$$

(1)

$$= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{\infty}$$

siamo per la dis. triangolare che

$$\|f_n\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty} + \|f - f_n\|_{\infty}$$

$$\|f\|_{\infty} \geq \|f_n\|_{\infty} - \|f - f_n\|_{\infty}$$

per il limsup $n \rightarrow +\infty$

$$\|f\|_{\infty} \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{\infty}$$

(2)

$$\|f\|_{\infty} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{\infty} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$$

$\Rightarrow$ sono tutte uguaglianze e in particolare

$$\|f\|_{\infty} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{\infty} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{\infty} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_{\infty}$$

□

Introduciamo la seguente classe di funzioni

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Denoteremo con $C_b(E)$ l'insieme

$$C_b(E) = \{f: E \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue su } E \text{ e limitate}\}$$

Inoltre dati un intervallo $[a, b]$ dico che
 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $\bar{f}$ di classe C^1 su $[a, b]$

f $\bar{f}$ derivabile, $f'(a^+) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(b+h) - f(a)}{h}$

$$f'(b^-) := \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

e lo derivato $f': [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definito come

$$f'(x) = \begin{cases} f'(a^+) & \text{se } x = a \\ f'(x) & \text{se } x \in (a, b) \\ f'(b^-) & \text{se } x = b \end{cases}$$

$\bar{f}$ continua su $[a, b]$

Definiamo $C^1([a, b]) := \left\{ f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ di classe } C^1 \text{ su } [a, b] \right\}$

Oss.: le classi $C_b(E)$ e $C^1([a, b])$ sono
spazi vettoriali, ovvero se $f, g \in C_b(E)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g \in C_b(E)$; similmente se
 $f, g \in C^1([a, b])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f + \beta g \in C^1([a, b])$

Definiamo lo spazio $C_b(E)$ di una norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} \{|f(x)|\} \quad \forall f \in C_b(E)$$

Definiamo lo spazio $C^1([a, b])$ con la norma

$$\|f\|_{C^1} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \quad \forall f \in C^1([a, b])$$

Esercizio : mostrare che $\|\cdot\|_{C^1}$ è infatti una norma.

$$(i) \|f\|_{C^1} = 0 \iff f \equiv 0$$

$$(ii) \|\alpha f\|_{C^1} = |\alpha| \|f\|_{C^1} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(iii) \|f+g\|_{C^1} \leq \|f\|_{C^1} + \|g\|_{C^1} \quad \forall f, g \in C^1([a,b])$$

Gli spazi vettoriali $(C_b(E), \|\cdot\|_\infty)$ e $(C^1([a,b]), \|\cdot\|_{C^1})$ sono spazi normati ed hanno, in quanto tali, una naturale struttura di spazi metrici.

Se $f, g \in C_b(E)$ possiamo definire una distanza tra f e g nel seguente modo

$$d(f, g) = \|f - g\|_\infty$$

esercizio verificare che $d(f, g)$ è di fatto una distanza.

In modo analogo, se $f, g \in C^2([a,b])$

$$d(f, g) = \|f - g\|_{C^1}.$$

Teorema Lo spazio vettoriale normato $(C_b(E), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio completo.

Dimostrazione Ogni successione di Cauchy è convergente.

Prenda una successione in $C_b(E)$

$f_n \in C_b(E)$; dire che f_n è di Cauchy
significa che $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon > 0$ t.c. $\forall n, m \geq n_\varepsilon$
 $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$.

Dire che f_n è una successione convergente
significa che $\exists f \in C_b(E)$ t.c. $f_n \rightarrow f$
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon > 0$ t.c. $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon$
 $\Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow +\infty$

dim.: per mostrare il teorema facciamo vedere
che f_n di Cauchy (giolle) $\Rightarrow f_n$ convergente
(vollo)

Sia f_n di Cauchy. Sia $x \in E$, allora

deduciamo che $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$

Quindi, essendo f_n di Cauchy, deduciamo che anche
la successione numerica $f_n(x)$ è di Cauchy.

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon > 0$ t.c. $\forall n, m \geq n_\varepsilon$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$$

In quanto tale, e visto che $f_n(x) \in \mathbb{R}$, $f_n(x)$
è convergente quindi esiste un limite che chiamiamo
 $f(x)$. La funzione $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ non è definita
come $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

Ora osserviamo che in realtà $f_n \rightarrow f$
uniformemente su E .

Infatti, $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon > 0$ t.c. $\forall n, m \geq n_\varepsilon$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in E$$

mondo $m \rightarrow +\infty$ o altro da $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon > 0$
 A.r. $\forall n \geq n_\varepsilon |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in E$.

è la definizione di convergenza uniforme.

Ho saputo che se f_n è Cauchy allora

$\exists f$ A.r. $f_n \rightarrow f$ uniformemente.

Sapremo per i teoremi precedenti che $f \in C_b(E)$
 perché è limitata e continua.

Dobbiamo far vedere che $d(f_n, f) \rightarrow 0$

$$\Leftrightarrow \|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0$$

questo è vero perché $f_n \rightarrow f$ uniformemente.

D

Teorema $C^1([a, b])$ è completo.

dim: dopo il teo successivo

Teorema: Sia $[a, b]$ intervallo $\subseteq \mathbb{R}$ e siano

$f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni di classe C^1 tali che

$f_n \rightarrow f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente e

$f'_n \rightarrow g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente.

Allora si ha $f \in C^1([a, b])$ e $f' = g$.

Dim.: Utilizziamo il teorema fondamentale del
 calcolo integrale che ci dice che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt \quad (*)$$

Penso al limite per $n \rightarrow +\infty$ e ho che

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad , \quad f_n(a) \rightarrow f(a)$$

$$\int_a^x f_n'(t) dt \longrightarrow \int_a^x g(t) dt$$

perché $f_n' \rightarrow g$ uniformemente. $\forall x \in [a, b]$

$$\Rightarrow \bigotimes \rightarrow f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt$$

Inoltre f e g sono funzioni continue perché sono limiti uniformi di funzioni continue. La formula in verde garantisce che $f'(x) = g(x)$.

$$\text{Perché } G(x) = \int_a^x g(t) dt \Rightarrow G \text{ è derivabile e } G'(x) = g(x)$$

$$\text{ma adesso } G(x) = f(x) - f(a) \text{ quindi } f(x) - f(a) \text{ è derivabile e } f'(x) = g(x). \quad \forall x \in [a, b]$$

f ha derivata $\equiv g$ ed essendo g continua

$$f \in C^1([a, b])$$

esercizio far vedere che $f'(a^+) = g(a)$ e $f'(b^-) = g(b)$.

□

Torniamo al teorema che dice che $C^1([a, b])$ è completo.

dim.: Sia $f_n \in C^1([a, b])$ di Cauchy $\Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } \|f_m - f_n\|_{C^1} \leq \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_\varepsilon$$

$$\|f_m - f_n\|_{C^1} = \|f_m - f_n\|_\infty + \|f'_m - f'_n\|_\infty$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } \|f_m - f_n\|_\infty \leq \varepsilon \\ \|f'_m - f'_n\|_\infty \leq \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_\varepsilon$$

$$\Rightarrow f_m \in C_b([a, b]) \text{ sia } f'_m \in C_b([a, b]) \\ \text{Sono di Cauchy in } (C_b([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$$

f_m sono $C^1([a, b])$ ma possiamo vederle anche come funzioni continue e limitate su $[a, b]$.

$\in C_b([a, b])$ con $E = [a, b]$ per le cond. vale
formano una successione di Cauchy in $C_b([a, b])$.

Visto che f_m è una successione di Cauchy
in $C_b([a, b])$, per un teorema precedente ($C_b([a, b])$ è
completo)

$$\Rightarrow \exists f \in C_b([a, b]) \text{ t.c. } f_m \rightarrow f \text{ uniform.}$$

Im modo analogo le condizioni valgono anche se si dice
che $f'_m \in C_b([a, b])$ è di Cauchy.

$$\Rightarrow \exists g \in C_b([a, b]) \text{ t.c. } f'_m \rightarrow g \text{ uniformemente}$$

Infine, il teorema precedente, dice che
 $f \in C^1([a, b])$ e $f' = g$.

$$\Rightarrow f_m \rightarrow f \text{ uniform. } f'_m \rightarrow f' \text{ unif.}$$

$$\Rightarrow \bullet) \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } \|f_m - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall m \geq \bar{n}_\varepsilon$$

$$\bullet) \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \hat{n}_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } \|f'_m - f'\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall m \geq \hat{n}_\varepsilon.$$

$$\Rightarrow \text{pongo } n_\varepsilon = \max\{\bar{n}_\varepsilon, \hat{n}_\varepsilon\} \text{ ho che}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon > 0 \quad \text{t.c.} \quad \forall n \geq n_\varepsilon$$

$$\|f_n - f\|_{C^1} = \|f_n - f\|_\infty + \|f'_n - f'\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow f_n \rightarrow f \text{ in } (C^1([a,b]), \|\cdot\|_{C^1})$$

□

esempio: Prendiamo lo spazio $C_b([-1,1])$

e definisco $\|f\|_1 := \int_{-1}^1 |f(x)| dx$

esercizio verificare che $\|\cdot\|_1$ è una norma su $C_b([-1,1])$

•) $\|f\|_1 = 0 \Rightarrow f \equiv 0$.

esempio $\chi_{\{0\}} = \begin{cases} 1 & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \int |\chi_{\{0\}}(t)| dt = 0 \quad \text{pur essendo} \quad \chi_{\{0\}} \neq 0$$

Mostriamo che $(C_b([-1,1]), \|\cdot\|_1)$ non è completo

Mostriamo che $\exists f_n$ di Cauchy tale che f_n non ammette limite in $C_b([-1,1])$.

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & x \in [-1, 0] \\ nx & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1 & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

le f_n convergono puntualmente a f definita
come $f = \chi_{(0,1]} = \begin{cases} 0 & x \in [-1,0) \\ 1 & x \in (0,1] \end{cases}$

Per il d. di Cauchy $\Leftrightarrow$ dobbiamo mostrare che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon > 0 \quad \text{s.c.} \quad \|f_n - f_m\|_1 \leq \varepsilon$$

$$\forall n, m \geq n_\varepsilon.$$

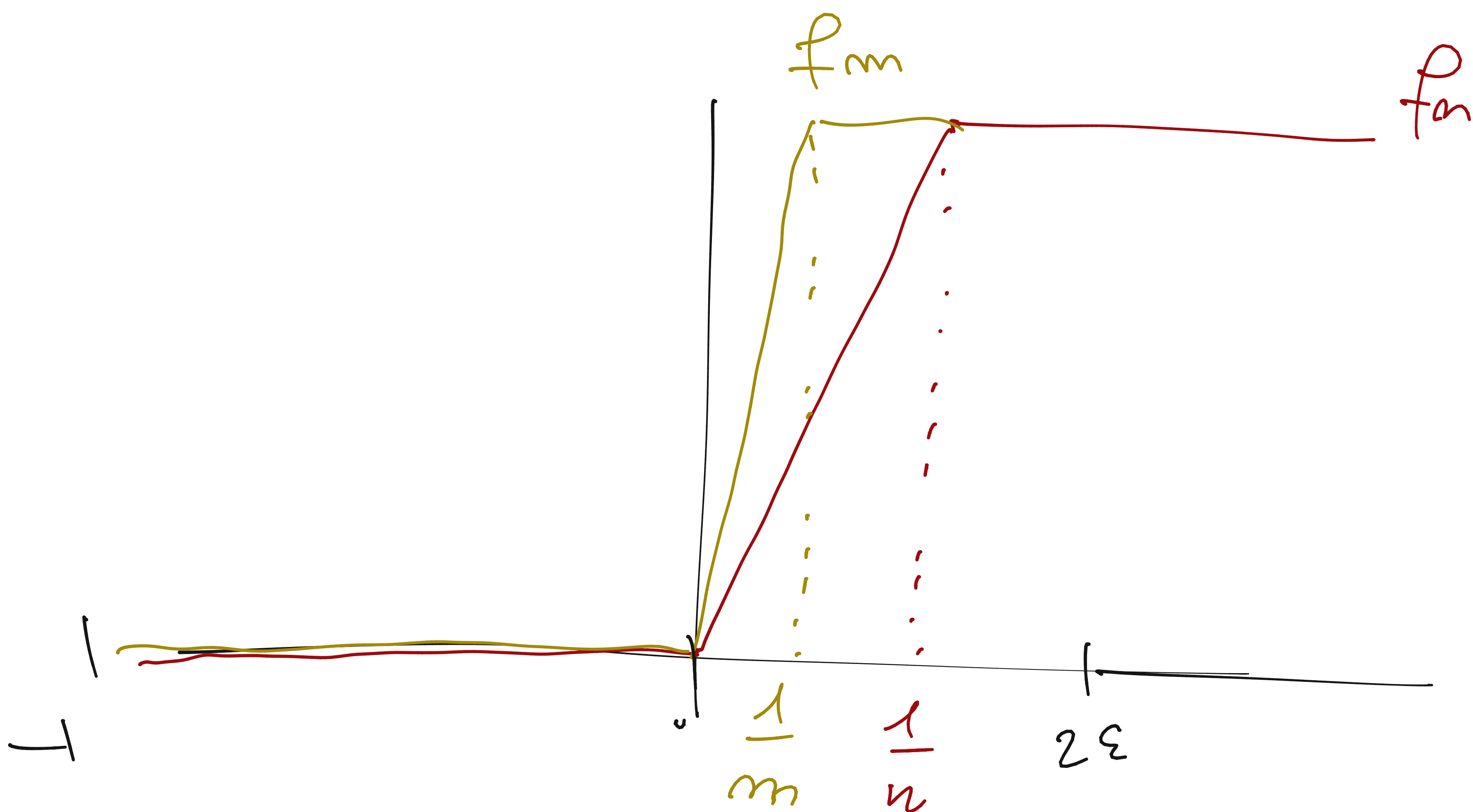
Preso $\varepsilon > 0$ prendo

$$n, m \geq n_\varepsilon$$

$$n_\varepsilon > \frac{1}{2\varepsilon} \quad \left(n_\varepsilon = \left\lfloor \frac{1}{2\varepsilon} + 1 \right\rfloor \right)$$

$$|f_n - f_m| =$$

$$n, m \geq n_\varepsilon > \frac{1}{2\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < 2\varepsilon$$



$$|f_n - f_m| = 0 \quad \text{su} \quad [-1, 0) \text{ e } [2\varepsilon, 1]$$

$$|f_n - f_m| \leq |f_n| + |f_m| \leq 2 \quad \text{su} \quad [0, 2\varepsilon]$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 |f_n - f_m| dx \leq \int_0^{2\varepsilon} |f_n - f_m| dx \leq \int_0^{2\varepsilon} 2 dx = 4\varepsilon$$

Quindi ho scoperto che $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon > 0$ A.c

$$\|f_m - f_n\|_1 = \int_{-1}^1 |f_m - f_n| \leq 4\varepsilon \quad \forall m, n \geq n_\varepsilon$$

↓
questo sarebbe venuto e n
avessimo preso $n_\varepsilon \geq \frac{2}{\varepsilon}$.

$\Rightarrow f_n$ è di Cauchy.

Non AMMETTE LIMITE IN $C_b([-1, 1])$ perché

$$\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

dove $f = \chi_{(0, 1]}$ è il limite puntuale

e $f \notin C_b([-1, 1])$ perché è discontinua
in 0.

D