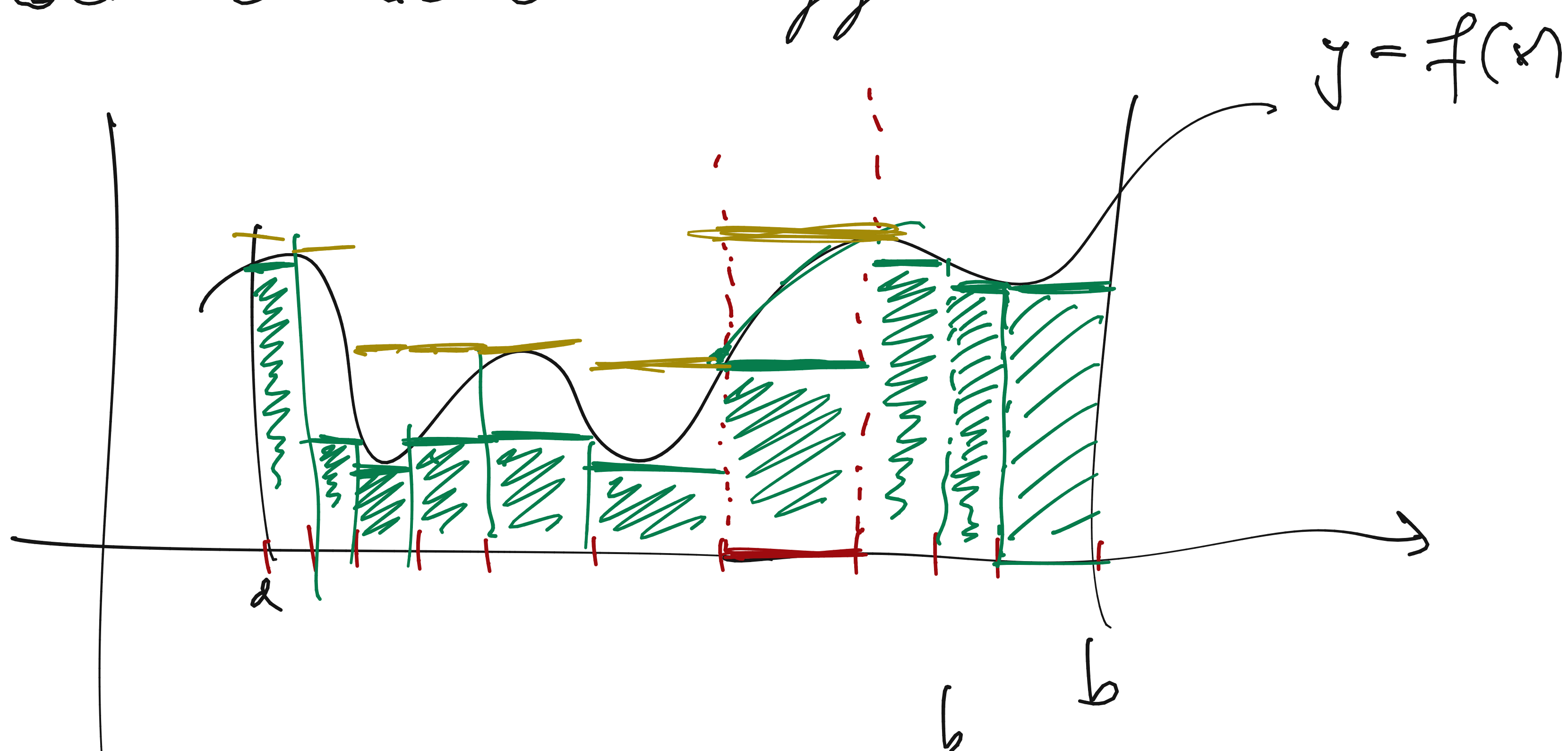


Integrazione di funzioni in più variabili

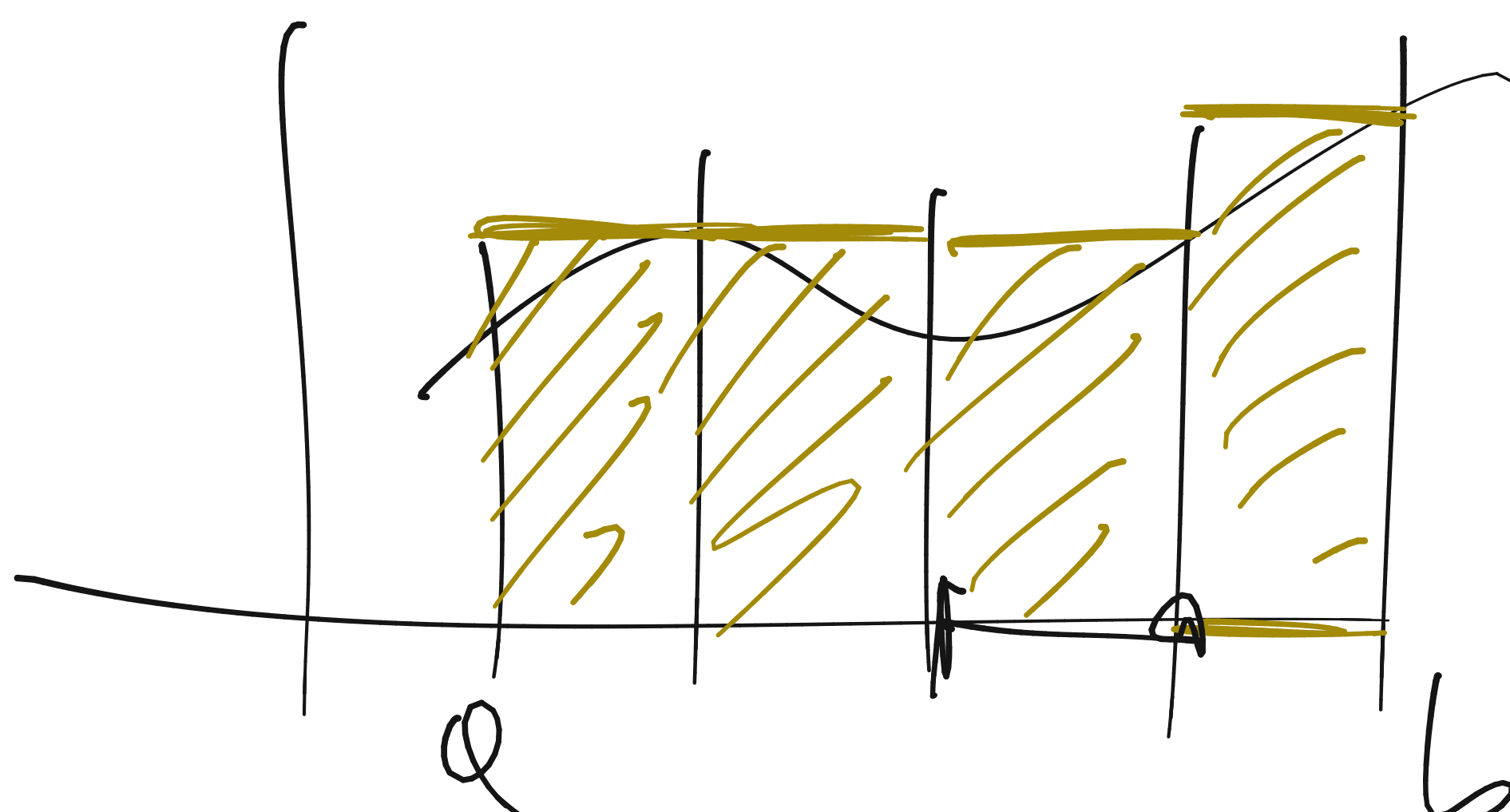
Oss: la nozione di integrale che ho fatto

Belletrini è dovuta a "De Giorgi"
è del tutto equivalente alle nozioni di
integrale che diamo oggi.



volgare integrale $\int_a^b f(x) dx$

prende una partizione in intervallini dell (a, b)
in ognuno di essi disegno un rettangolo
che ho altezza fino alla linea verde
(basta vedere il minimo della f nell'intervallino)

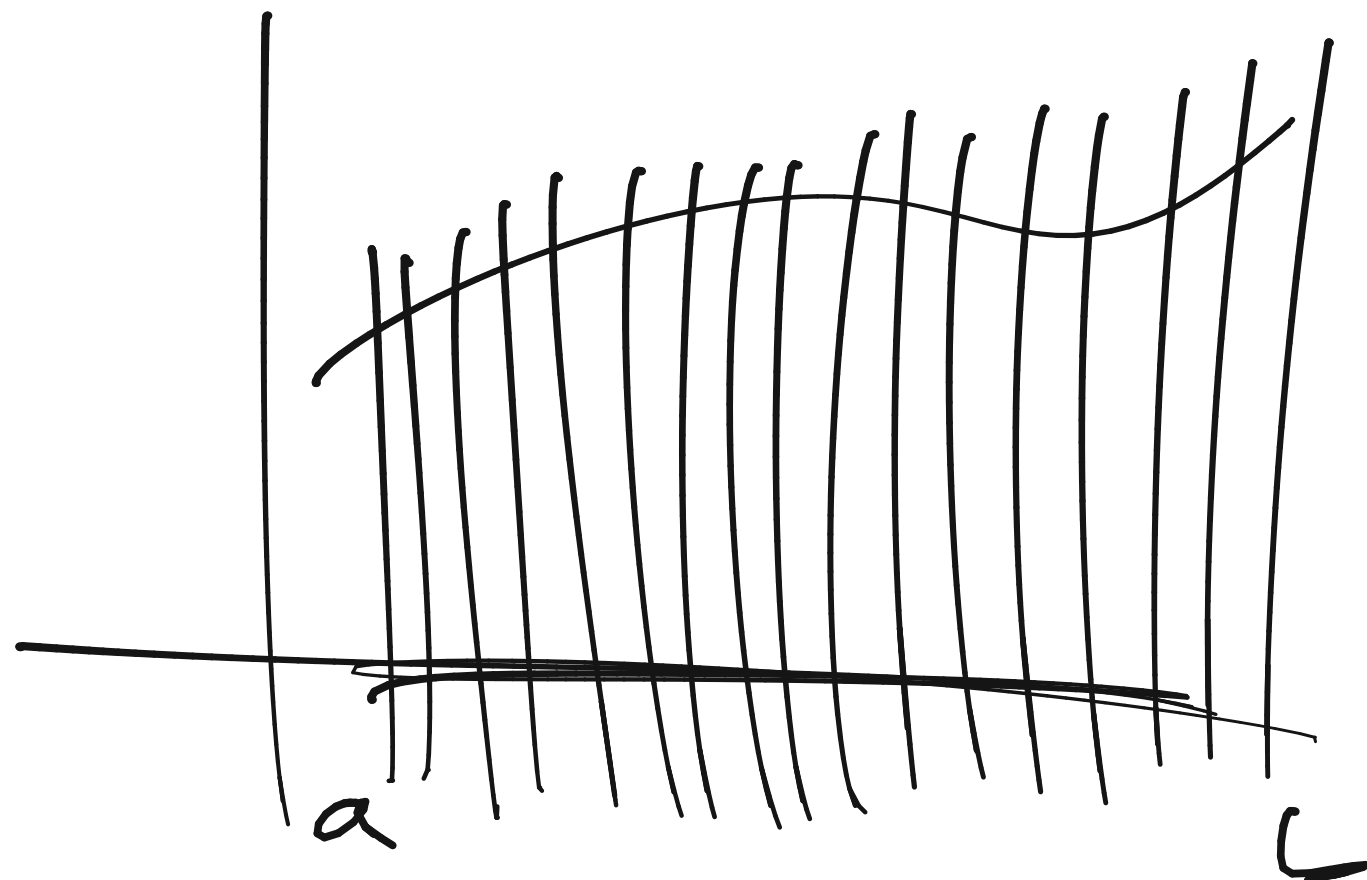


le sono delle cose di rettangoli verdi

è minore dell'area del sottografo

mentre la somma delle cose dei rettangoli

più i maggiore.



infine la partizione di intervalli le aree dei rettangoli verdi sono sempre più vicine a quelle dei rettangoli gialli.

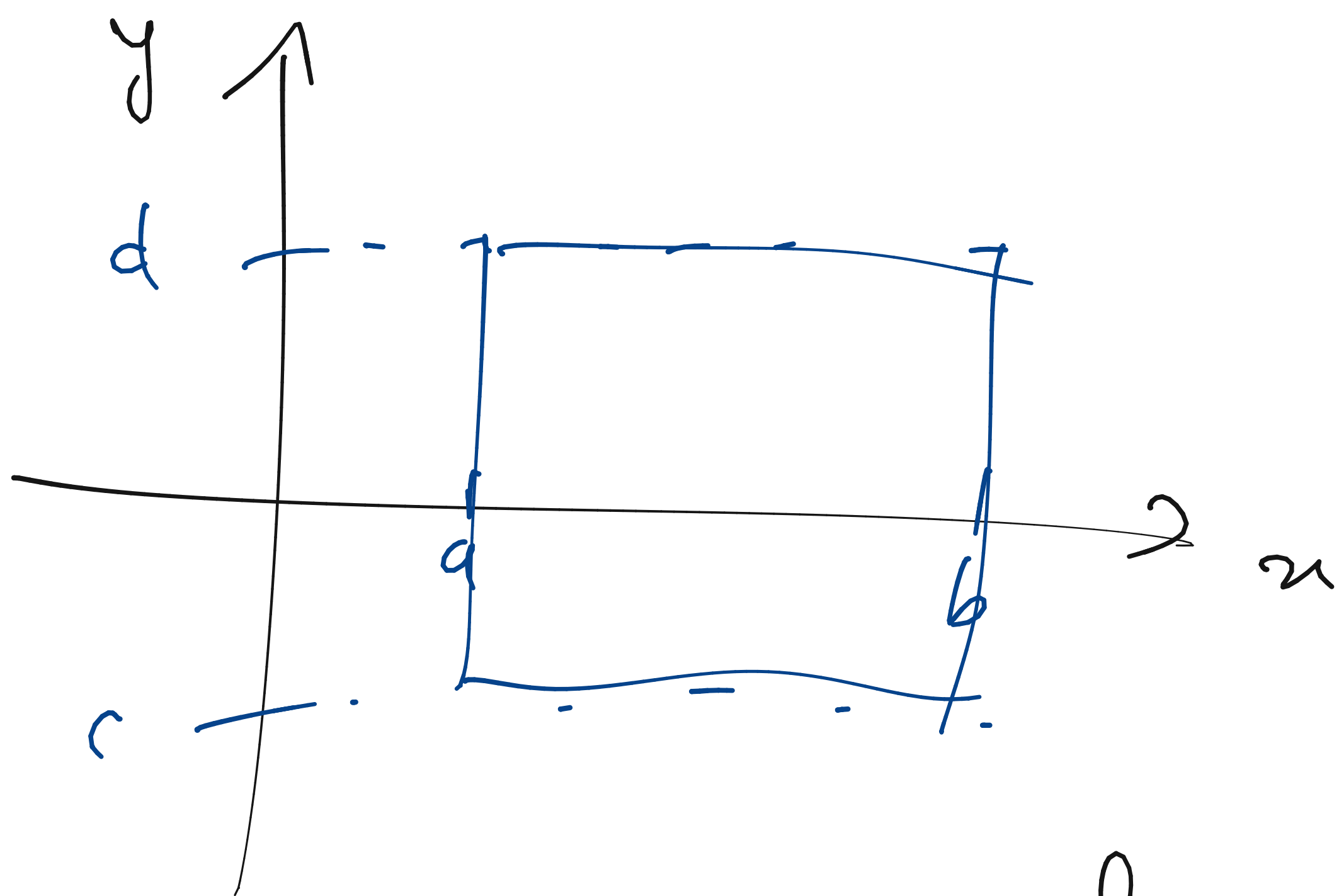
$\Rightarrow$ Se ammettiamo lo stesso limite quando tutti gli intervalli della partizione tendono a zero Allora definiremo l'integrale della funzione con il limite ottenuto.

Per funzioni di più variabili vale per l'integrale su domini $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Mettiamo nel caso $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^2$ ($n=2$)
Def: un rettangolo in $\mathbb{R}^2$ è un insieme della forma $R = [a, b) \times [c, d)$

$$R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b), y \in [c, d) \}$$



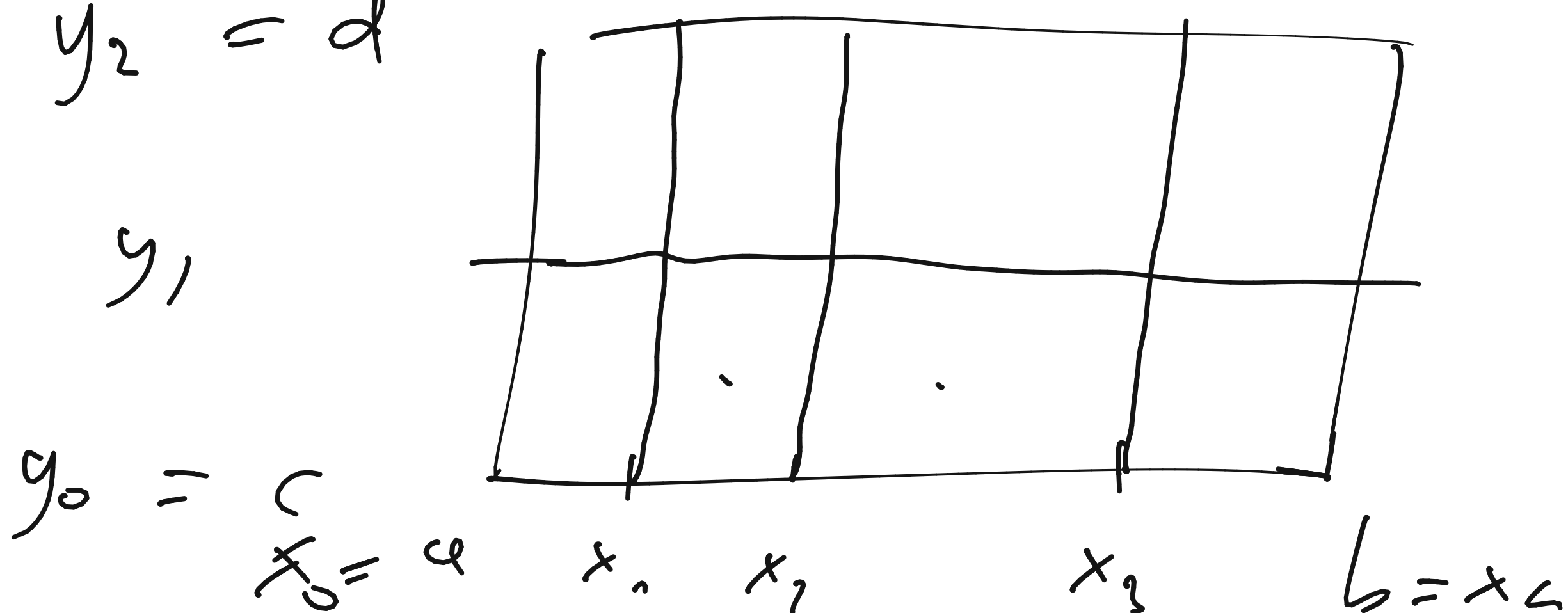
Definisco un pluriangolo $P \subseteq \mathbb{R}^2$ un poligono insieme che è unione finita di rettangoli o due a due disgiunti.

Def. Se $E \subseteq \mathbb{R}^2$ definisco la funzione caratteristica di E come $\chi_E: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

Supponiamo R sia un rettangolo $R = [a, b] \times [c, d]$ chiamo una partizione di R in rettangoli due sequenze di numeri $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ e $y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m$ tali che

$$x_0 = a, \quad x_n = b, \quad y_0 = c, \quad y_m = d, \quad n, m \geq 1$$



In tal caso chiamo

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i) \times [y_{j-1}, y_j)$$

$$i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$$

In particolare posso vedere R come
un plurirettangolo e scrivere

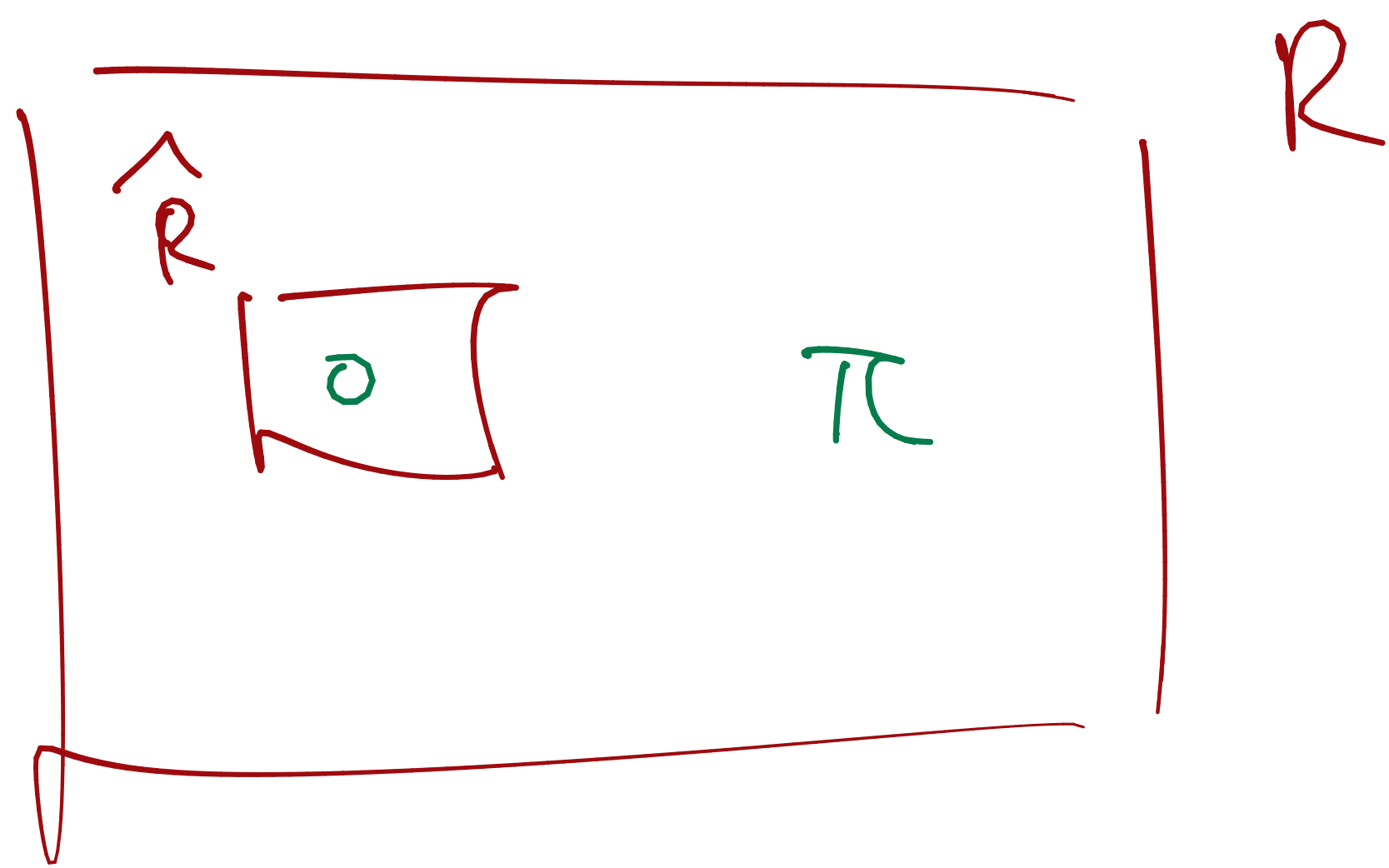
$$R = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m R_{ij}$$

Def.: Se $f: R \rightarrow \mathbb{R}$, allora f si dice
funzione semplice se $\exists x_0 < x_1 < \dots < x_n$
 $\exists y_0 < y_1 < \dots < y_m$ partizione di R
tale che f è costante su ogni
rettangolo R_{ij} .

y_4	1	2	2	
y_3	1	2	2	
y_2	1	2	2	
y_1	1	2	2	
y_0	1	2	2	
	x_0	x_1	x_2	x_3

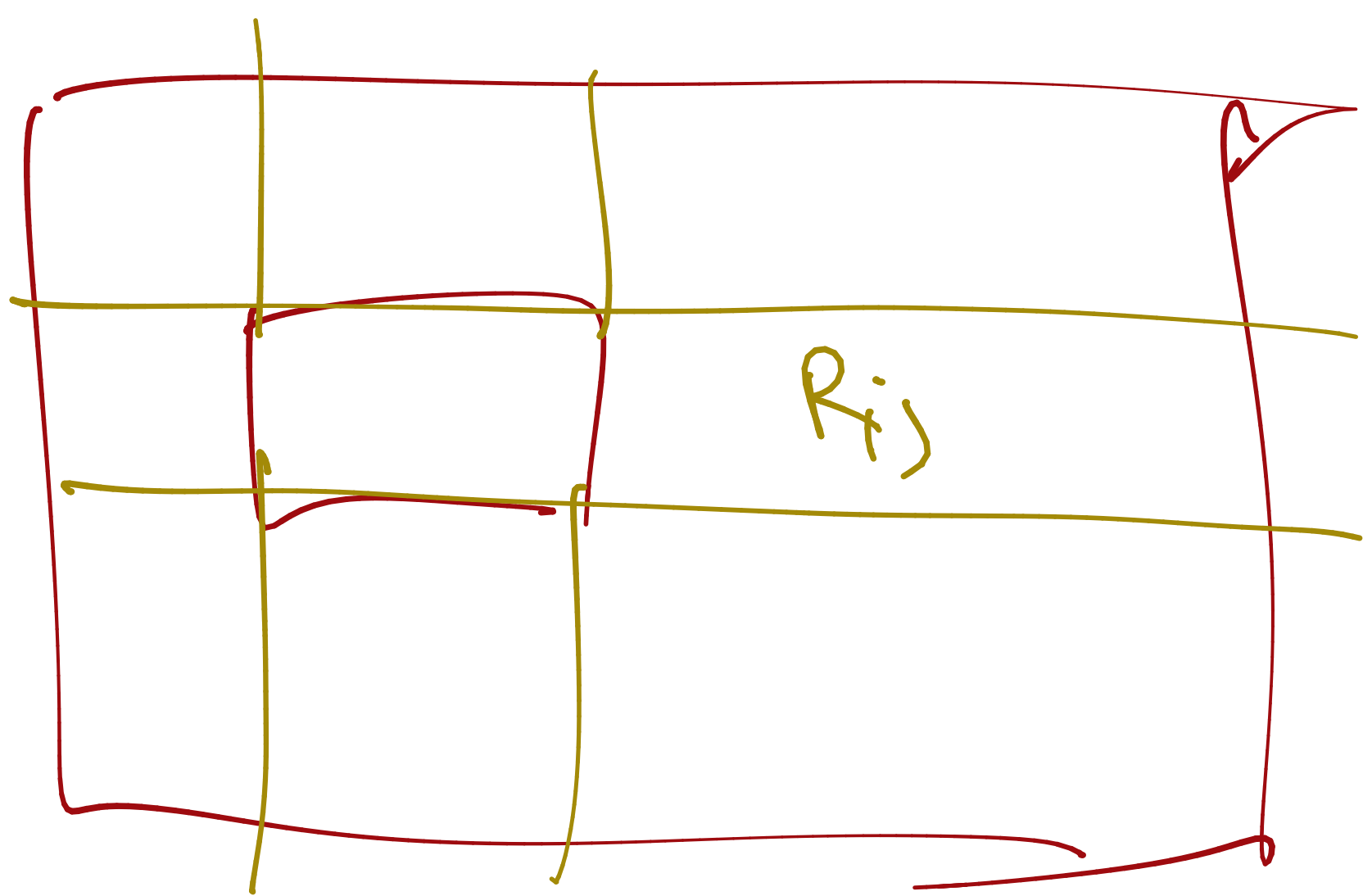
Se prendo
 χ_R : è semplice

Se prendo
le funzioni che
valle 1 sui
rettangoli R_{1j} e valle 2 sugli altri.



$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \hat{R} \\ \pi & x \in R \setminus \hat{R} \end{cases}$$

i simple



Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è simple allora
 assume un numero finito di valori
 e se $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$ rappresenta i valori che f
 assume nel rettangolo R_{ij} la funzione f
 può essere scritta nella seguente forma equiv.

$$f(x) = \lambda_{ij} \text{ se } x \in R_{ij}$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$$

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} \chi_{R_{ij}}$$

infatti: $f(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} \chi_{R_{ij}}(x)$

Se $x \in R_{35} \Rightarrow \lambda_{11} \chi_{R_{11}}(x) + \lambda_{12} \chi_{R_{12}}(x) + \dots$

$$+ \underbrace{\lambda_{35} \chi_{R_{35}}(x)} + \dots$$

$$\downarrow$$

$$\lambda_{35} \cdot 1 = \lambda_{35}$$

Def. Se $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ funzione semplice

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} \chi_{R_{ij}} \quad \lambda_{ij} \in \mathbb{R} \quad \forall i, j$$

L'integrale secondo Riemann di f

su R è dato da

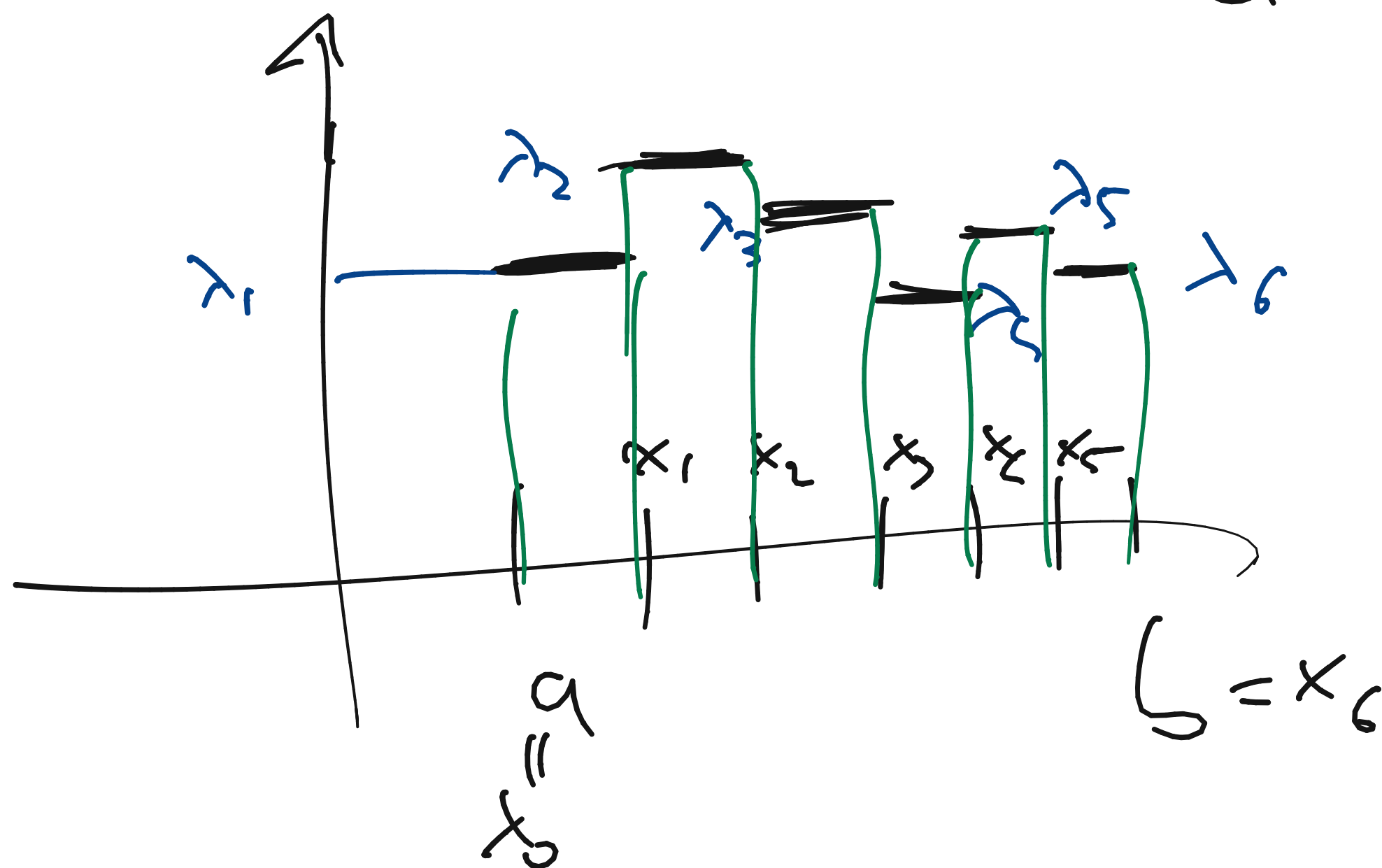
$$\int_R f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} \cdot m(R_{ij})$$

dove $m(R_{ij}) =$ area del rettangolo R_{ij}

e si ottiene

$$m(R_{ij}) = (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_j - y_{j-1})$$

nel caso 1-dimensionale



$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

è semplice

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{[x_{i-1}, x_i)}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i - x_{i-1})$$

sono le aree dei rettangoli
costituenti il grafico della funzione

Def.: Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ qualsiasi
definisco il supporto di f come l'insieme

$$\text{supp}(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \neq 0\}$$

Dico che f è a supporto compatto se
 $\text{supp}(f)$ risulta compatto in $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ limitato.

Def.: Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzione limitata
Allora definisco le seguenti classi di
funzioni

$$\mathcal{F}^+ := \left\{ \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ semplici tali} \right. \\ \left. \text{che } \varphi(x, y) \geq f(x, y) \right. \\ \left. \forall (x, y) \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{F}^- := \left\{ \psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ semplici t.c.} \right. \\ \left. \psi(x, y) \leq f(x, y) \forall (x, y) \in \mathbb{R} \right\}$$

oss.: Se f è limitata $\Rightarrow f^+$ non
vuoto

infatti
$$\varphi(x,y) \equiv \sup \{ f(x,y) : (x,y) \in R \}$$

$$\forall (x,y) \in R$$

$$\Rightarrow \varphi \in \mathcal{F}^+$$

Similmente $\psi \in \mathcal{F}^-$ e ad esempio

$$\psi(x,y) \equiv \inf \{ f(x,y) : (x,y) \in R \}$$
$$\forall (x,y) \in R$$

Def.: Dato $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ funzione limitata
Diciamo che f è integrabile secondo Riemann
se vale

$$\inf \left\{ \int_R \varphi(x,y) dx dy : \varphi \in \mathcal{F}^+ \right\} =$$
$$= \sup \left\{ \int_R \psi(x,y) dx dy : \psi \in \mathcal{F}^- \right\}$$

oss.: Notazione: visto che integro su R
in due variabili scriverò l'integrale con $dx dy$

Se $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata e integrabile
secondo Riemann definisco

$$\int_R f(x,y) dx dy = \inf \left\{ \int_R \varphi : \varphi \in \mathcal{F}^+ \right\} = \sup \left\{ \int_R \psi : \psi \in \mathcal{F}^- \right\}$$

Se $f: R \rightarrow R$ è limitata definisce

$$\inf \left\{ \int \varphi(x,y) dx dy : \varphi \in \mathcal{F}^+ \right\} = \int^* f(x,y) dx dy$$

e lo chiama integrale superiore di f su R .
E definisce l'integrale inferiore di f su R

$$\int_* f(x,y) dx dy := \sup \left\{ \int \psi(x,y) dx dy : \psi \in \mathcal{F}^- \right\}$$

Oss.: Si ha sempre $\int^* f(x,y) dx dy \geq \int f(x,y) dx dy$
= vale a dire f è integrabile

FATTO FONDAMENTALE : Equivalentemente

$f: R \rightarrow R$ limitata è integrabile se e solo se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varphi \in \mathcal{F}^+ \text{ e } \exists \psi \in \mathcal{F}^-$ tale che

$$(*) \quad \int_R \varphi(x,y) dx dy - \int_R \psi(x,y) dx dy < \varepsilon$$

Infatti. Supponiamo $\forall \varepsilon \quad \exists \varphi \in \mathcal{F}^+, \psi \in \mathcal{F}^-$

tal che $(*)$ è soddisfatto.

Dobbiamo verificare che f è integrabile ovvero

che

$$\int_* f(x,y) dx dy = \int^* f(x,y) dx dy$$

In generale
$$\int_{\mathbf{x}} f(x,y) dx dy = \sup \left\{ \int \hat{\varphi} dx dy : \begin{array}{l} \hat{\varphi} \text{ semplice} \\ \hat{\varphi} \leq f \end{array} \right\}$$

$$\leq \int^* f(x,y) dx dy = \inf \left\{ \int \hat{\varphi} dx dy : \begin{array}{l} \hat{\varphi} \text{ semplice} \\ \hat{\varphi} \geq f \end{array} \right\}$$

Supponiamo per assurdo che il $\leq$ sia un $<$

$$\Rightarrow \delta := \int^* f dx dy - \int_{\mathbf{x}} f dx dy > 0$$

$$\Rightarrow \int \varphi dx dy \geq \int^* f dx dy \quad \text{inoltre} \quad \int \psi dx dy \leq \int_{\mathbf{x}} f dx dy$$

$$\Rightarrow \int \varphi dx dy - \int \psi dx dy \geq \int^* f dx dy - \int_{\mathbf{x}} f dx dy = \delta > 0$$

per la (*) se prendo $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ lo disup.

che ho appena trovato è assurdo. $\Rightarrow \int^* f = \int_{\mathbf{x}} f$
 $\Rightarrow f$ integrabile

Supponiamo ora f integrabile. $\Rightarrow \int^* f = \int_{\mathbf{x}} f$

$$\int^* f = \inf \left\{ \int \varphi dx dy : \varphi \geq f \right\} = \sup \left\{ \int \psi dx dy : \begin{array}{l} \psi \leq f \end{array} \right\}$$

$$= \int_{\mathbf{x}} f dx dy$$

Per definizione di $\inf \Rightarrow \exists \varphi$ semplice
 $\varphi \geq f$

$$\text{tale che} \quad \int \varphi dx dy \leq \int^* f dx dy + \frac{\varepsilon}{2}$$

e similmente per def di estremo superiore

$$\exists \psi \in \mathcal{F}^- \text{ t.c.} \quad \int \psi dx dy \geq \int_{\mathbf{x}} f dx dy - \frac{\varepsilon}{2}$$

Sottraendo le due disuguaglianze otteniamo

$$\int \varphi dx dy - \int \psi dx dy \leq \int_{*}^{\dagger} f dx dy + \frac{\epsilon}{2} - \int_{*}^{\dagger} f dx dy + \frac{\epsilon}{2}$$

$$= \epsilon$$

ovvero la condizione $\otimes$ è soddisfatta $\square$

Definizione Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diremo che ha supporto compatto se $\text{supp}(f)$ è compatto. Dove il supporto di f è

$$\text{supp}(f) = \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) \neq 0\}$$

Oss.: f è a supporto compatto se e solo se f ha $\text{supp}(f)$ limitato.

Esempio Sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato. Allora

χ_E la funzione caratteristica di E ha supporto compatto. Infatti

E limitato $\Rightarrow \overline{E}$ limitato

$$\text{supp}(\chi_E) = \overline{E}$$

Def.: Sia E un insieme limitato.

Allora diremo che E è misurabile secondo

Peano-Jordan se la funzione

χ_E risulta integrabile secondo Riemann.

Oss.: Se E è limitato $\Rightarrow \exists R$ rettangolo

t.c. $E \subseteq R$. Quindi $\chi_E : R \rightarrow \mathbb{R}$

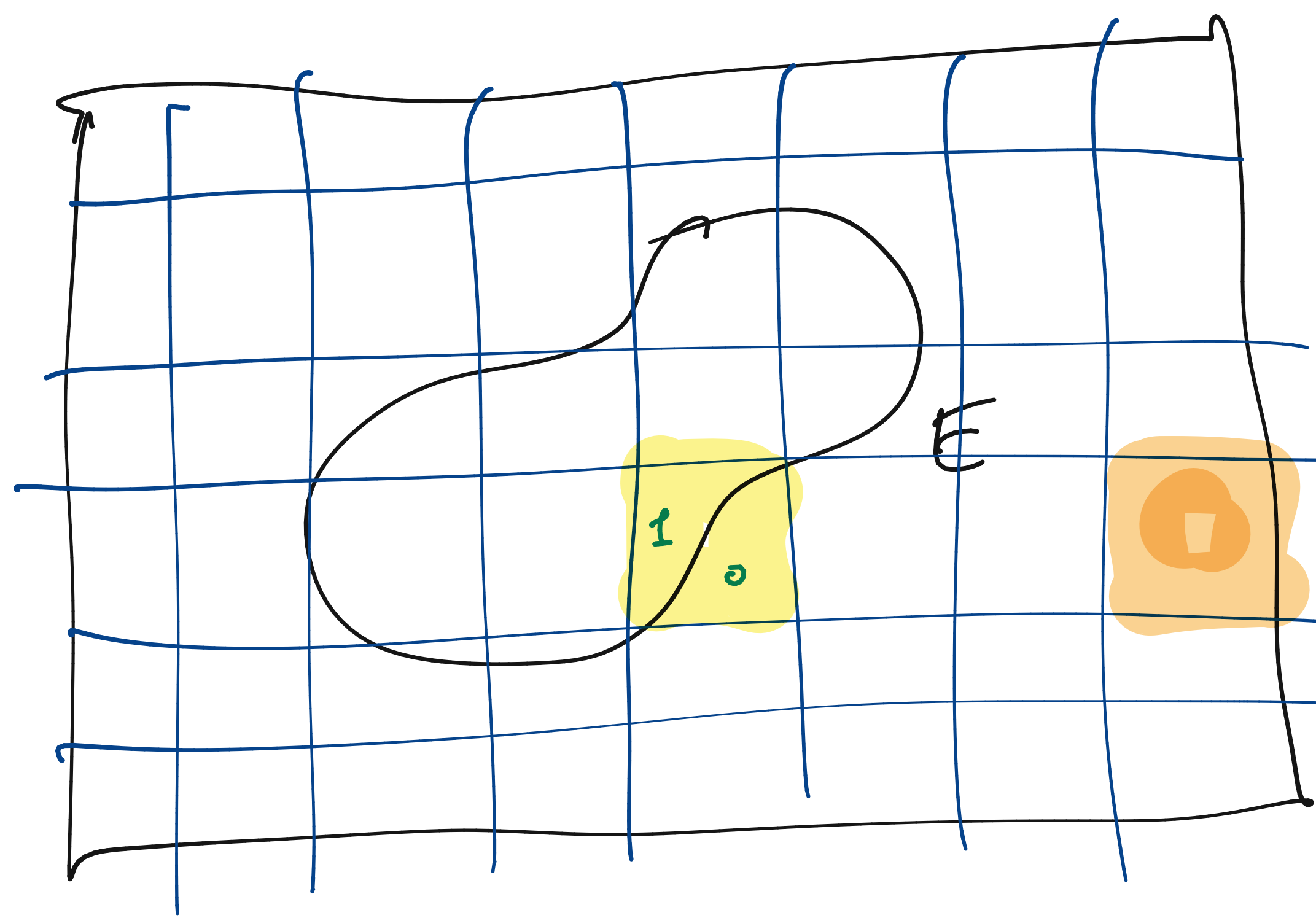
posso integrare $\int \chi_E dx dy$.

Se χ_E è integrabile $\int \chi_E dx dy = m(E)$

si chiama misura di Peano-Jordan di E

Oss.: $\int_R \chi_E dx dy = \int_E 1 dx dy = \text{area dell'insieme } E$.

Sia E insieme limitato misurabile secondo P-J



è misurabile

$\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi \geq \chi_E$ semplice

$\exists \psi \leq \chi_E$ semplice

t.c. che

$$\int_R \varphi dx dy - \int_R \psi dx dy \leq \varepsilon$$

$\mathbb{R}$

Supponiamo $\varphi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} \chi_{R_{ij}}$

$$\psi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu_{ij} \chi_{R_{ij}}$$

$$\varphi \geq \chi_E \geq \psi \Rightarrow \forall_{ij} \lambda_{ij} \geq \mu_{ij}$$

se R_{ij} è un rettangolo tale che

$$R_{ij} \subseteq R \setminus E \Rightarrow \chi_E = 0 \text{ su } R_{ij}$$

$$\lambda_{ij} \geq 0 \geq \mu_{ij}$$

Similmente se $R_{ij} \subseteq E \Rightarrow \chi_E = 1$ su R_{ij}

$$\lambda_{ij} \geq 1 \geq \mu_{ij}$$

Se $R_{ij} \cap \partial E \neq \emptyset \Rightarrow \chi_E$ su R_{ij}
assume sia valore 1
che valore 0

$$\lambda_{ij} \geq 1 \quad \mu_{ij} \leq 0$$

Definisco $\lambda_{ij}^* = 0$ se $R_{ij} \subseteq R \setminus E$

$$\lambda_{ij}^* = 1 \quad \text{se } R_{ij} \subseteq E$$

$$\lambda_{ij}^* = 1 \quad \text{se } R_{ij} \cap \partial E \neq \emptyset$$

$$\mu_{ij}^* = 0 \quad \text{se } R_{ij} \subseteq R \setminus E$$

$$\mu_{ij}^* = 1 \quad \text{se } R_{ij} \subseteq E$$

$$\mu_{ij}^* = 0 \quad \text{se } R_{ij} \cap \partial E \neq \emptyset$$

Noteremo che $\lambda_{ij}^* \leq \lambda_{ij}$ per la disuguaglianza
già osservata

e similmente $\mu_{ij}^* \geq \mu_{ij}$

$$\varphi^* := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ij}^* \chi_{R_{ij}} \leq \varphi$$

$$\psi^* := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \mu_{ij}^* \chi_{R_{ij}} \geq \psi$$

ma ancora ho che $\varphi^* \geq \chi_E \geq \psi^*$

$$\Rightarrow \int \varphi \, dx \, dy - \int \psi \, dx \, dy \leq \varepsilon$$

$$\quad \quad \quad \vee$$

$$\int \varphi^* \, dx \, dy - \int \psi^* \, dx \, dy$$

$$\quad \quad \quad \parallel$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(\lambda_{ij}^* m(R_{ij}) - \mu_{ij}^* m(R_{ij}) \right) = \bullet$$

definisco la classe $\mathcal{R}_{\partial E} = \left\{ \begin{array}{l} \text{rattiempl. } R_{ij} \\ \text{t.c. } R_{ij} \cap \partial E \neq \emptyset \end{array} \right\}$

$$\bullet = \sum_{R_{ij} \in \mathcal{R}_{\partial E}} \left(\lambda_{ij}^* - \mu_{ij}^* \right) m(R_{ij})$$

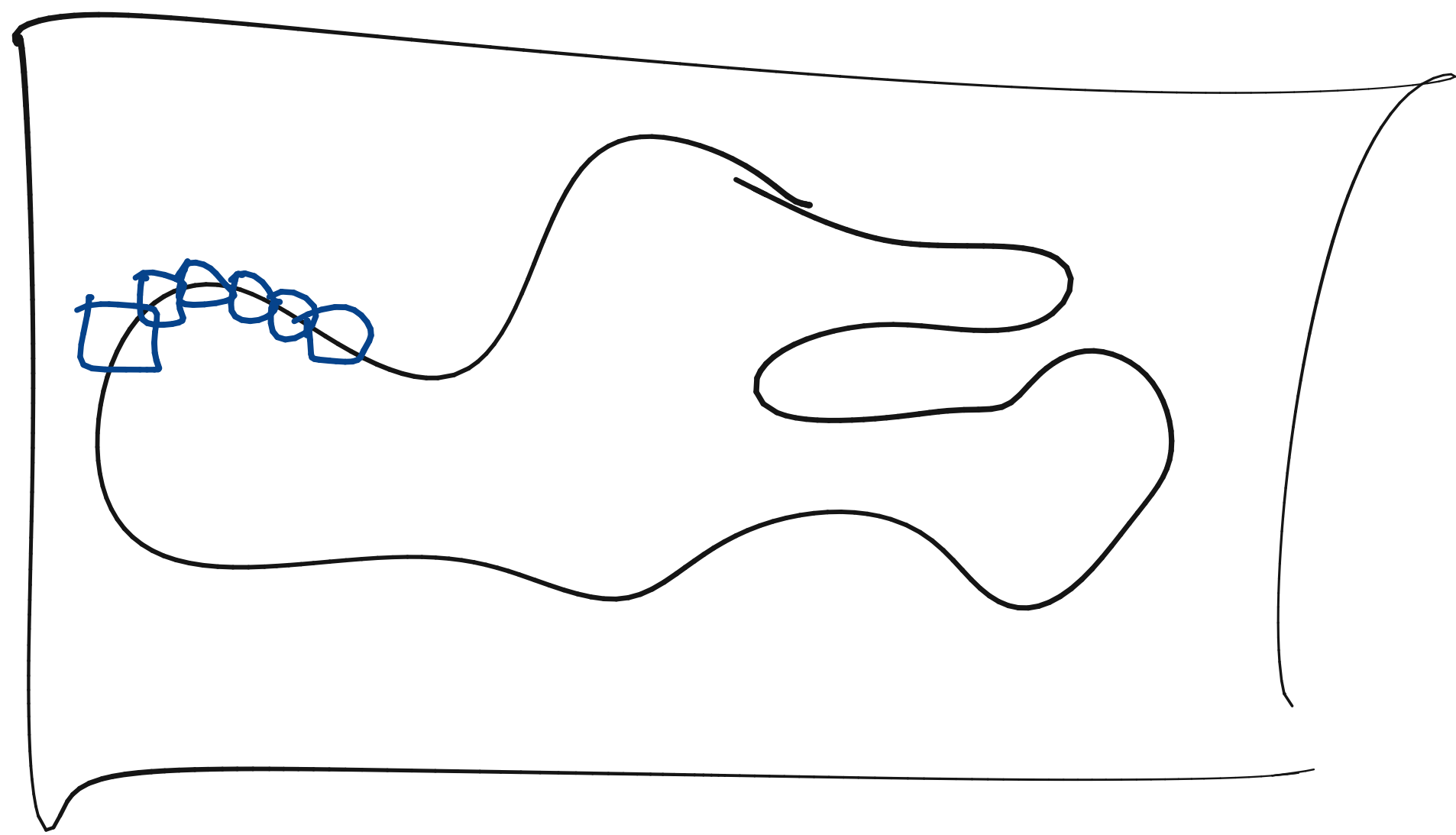
$$= \sum_{R_{ij} \in \mathcal{R}_{\partial E}} m(R_{ij})$$

Lemma Se E è un insieme limitato
misurabile secondo P-J Allora $\forall \varepsilon > 0$

$\exists$ famiglia di rettangoli $R \in \mathcal{R}_{\partial E}$ tale che

$$\bigcup_{R_i \in \mathcal{R}_{\partial E}} R_i \supseteq \partial E \quad \text{e inoltre}$$

$$\sum_{R \in \mathcal{R}_{\partial E}} m(R) \leq \varepsilon$$



esempio prendiamo $E = [0,1] \times [0,1] \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{ (x,y) : x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q} \}$$

$$E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} x \in [0,1] \text{ } y \in [0,1] \text{ ma} \\ x,y \text{ non sono entrambi} \\ \text{razionali} \end{array} \right\}$$

Domanda E è minimale secondo P-J?

No! Lo è. Supponiamo E minimale

$\Rightarrow$ per il lemma appena mostrato

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathcal{R}_{\partial E}$ famiglia di rettangoli
che ricopre ∂E e $\sum_{R \in \mathcal{R}_{\partial E}} m(R) \leq \varepsilon$

$$\partial E = [0, 1] \times [0, 1]$$

ogni punto $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ appartiene
 a ∂E perché $\forall B_r((x, y)) \exists$
 un punto $(p, q) \in B_r((x, y))$ con $(p, q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \partial E = [0, 1] \times [0, 1]$$

$$\Rightarrow \sum_{R \in \mathcal{R}_{\partial E}} m(R) \geq m([0, 1] \times [0, 1]) = 1$$

ASTURDO.

Teo: Sia R un rettangolo in $\mathbb{R}^2$
 e sia $f: \overline{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.
 Allora f è integrabile.

dim.: Utilizzeremo il seguente fatto:

Se $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ continue con K compatto
 $\Rightarrow f$ è uniformemente continue su K .

(Dimostrare con Prof. Scivone)

$\overline{R}$ è compatto in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ è unif. continue
 su $\overline{R}$

f unif. continue $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x, y \in \overline{R}$
 se $\|x - y\| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

Facciamo vedere che f è integrabile $\Rightarrow$
 facciamo vedere che vale la condizione fondamentale
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \varphi \in \mathcal{F}^+, \psi \in \mathcal{F}^-$ A.c. $\int \varphi dx dy - \int \psi dx dy$
 $\wedge$
 ε

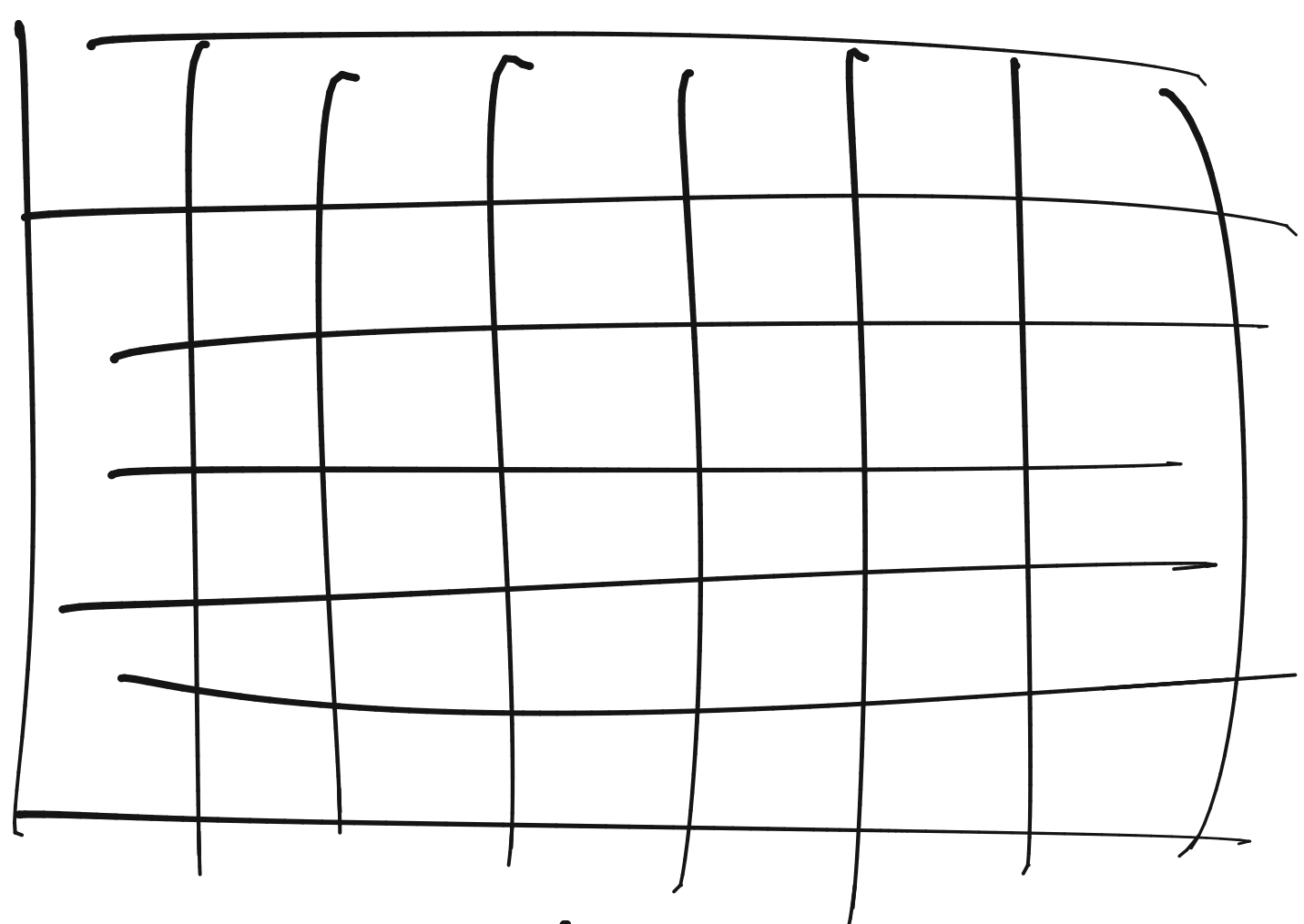
CHIAMIAMO $m(R)$ la misura di R
 essendo f unif. continuo su $\bar{R}$ avrò che $\exists \delta > 0$
 A.c. se $\|x - y\| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{m(R)}$

Scegli una partizione di R in rettangoli R_{ij}
 tale che $\text{diam}(R_{ij}) < \delta$ se $R = [a, b] \times [c, d]$

$\Leftrightarrow$ scegli $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ e
 $c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$

in modo che $x_i - x_{i-1} \leq \frac{\delta}{2}$ e $y_j - y_{j-1} \leq \frac{\delta}{2}$

$\forall i, j) \Rightarrow \text{diam}(R_{ij}) \leq \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2} = \frac{\delta}{\sqrt{2}} < \delta$



definisco $\forall i, j)$

$$\chi_{ij}^+ = \max \{ f(x, y) : (x, y) \in \overline{R_{ij}} \}$$

$$\chi_{ij}^- = \min \{ f(x, y) : (x, y) \in \overline{R_{ij}} \}$$

$$\Rightarrow \chi_{ij}^+ - \chi_{ij}^- \leq \frac{\varepsilon}{m(R)} \quad \text{perché se } v \neq w$$

sono punti di massimo e minimo di f in $\overline{R_{ij}}$

$$\Rightarrow \|v - w\| \leq \delta \Rightarrow \begin{matrix} |f(v) - f(w)| \leq \frac{\varepsilon}{m(R)} \\ | \chi_{ij}^+ - \chi_{ij}^- | \end{matrix}$$

Definizione $\varphi = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \lambda_{ij}^+ \chi_{R_{ij}}$

$$\psi = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \lambda_{ij}^- \chi_{R_{ij}}$$

$$\Rightarrow \varphi \geq f \geq \psi \quad \text{in ogni } R_{ij} \\ \Rightarrow \text{in tutto } R$$

$$\Rightarrow \varphi \in \mathcal{F}^+, \psi \in \mathcal{F}^-$$

Calcolando gli integrali ho

$$\int_R \varphi \, dx \, dy - \int_R \psi \, dx \, dy = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \lambda_{ij}^+ m(R_{ij}) - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \lambda_{ij}^- m(R_{ij})$$

$$= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\lambda_{ij}^+ - \lambda_{ij}^-) m(R_{ij}) \leq \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\varepsilon}{m(R)} m(R_{ij})$$

$$= \frac{\varepsilon}{m(R)} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 m(R_{ij}) = \frac{\varepsilon}{m(R)} m(R) = \varepsilon$$

La dimostrazione è conclusa

□

Corollario S.e. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funzione continua

$\Rightarrow f$ è integrabile in ogni rettangolo R .

Teorema S.e. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funzione limitata

e integrabile in R e sia $E \subseteq R$

misurabile secondo Peano - Jordan. Allora

$f \cdot \chi_E$ è integrabile in R .

Ricordiamo che

$$f \cdot \chi_E = \begin{cases} f & \text{in } E \\ 0 & \text{in } E^c = \mathbb{R}^2 \setminus E \end{cases}$$

Definizione Se $E \subseteq \mathbb{R}^2$ è un insieme misurabile secondo P-J, limitato, e $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile, definisce l'integrale di f su E come

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \cdot \chi_E =: \int_E f \, dx \, dy$$