

Teo: Sia E un insieme limitato
 e misurabile secondo Peano-Jordan e sia R
 un rettangolo $R \supseteq E$. Supponiamo $f: R \rightarrow \mathbb{R}$
 una funzione integrabile $\Rightarrow f$ è integrabile su E
 $\Leftrightarrow f \cdot \chi_E$ è integrabile

$$\int_R f \chi_E dx dy =: \int_E f dx dy$$

Corollario Se f è continua su $\bar{R}$ e $E \subseteq R$
 è un insieme misurabile secondo Peano-Jordan
 Allora f è integrabile su E .

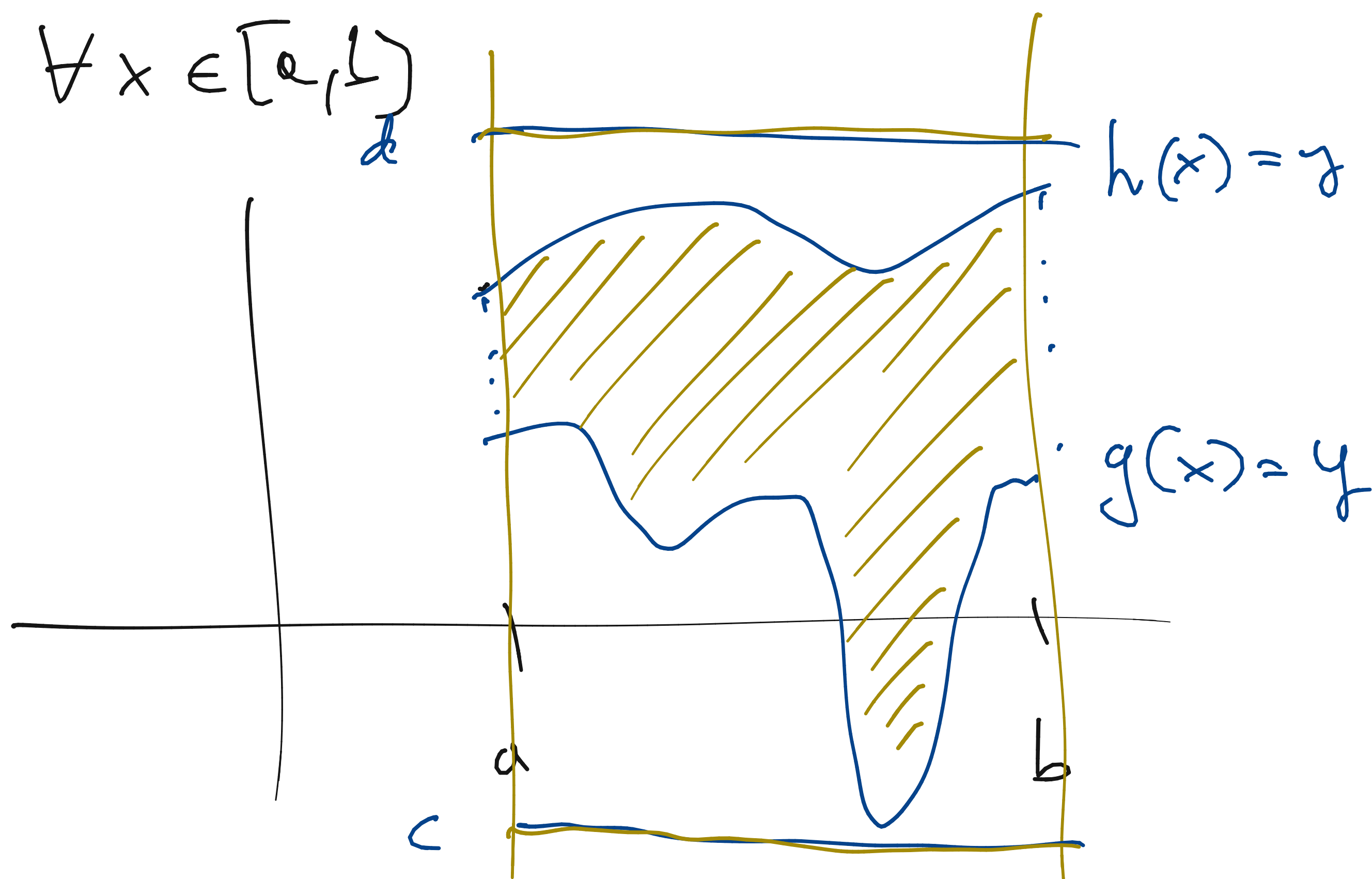
La dimostrazione del teorema la mettiamo

esempio insiemi E normali rispetto all'asse y .

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

$$g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tal che} \quad g(x) < h(x)$$

$$\forall x \in [a, b]$$



Fatto: Se g ed h sono limitate e
 integrabili secondo Riemann allora E
 è un rettangolo misurabile secondo Peano-Jordan

Come conseguenza del teorema enunciato prima
 prendiamo $d \in \mathbb{R}$ t.c. $h(x) < d \quad \forall x \in [a, b]$
 e prendiamo $c \in \mathbb{R}$ t.c. $g(x) > c \quad \forall x \in [a, b]$

$$\Rightarrow E = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x < b, g(x) \leq y < h(x) \}$$

è misurabile ed è contenuto in $R = [a, b] \times [c, d]$

Se $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile $\Rightarrow$

f è integrabile su $E \Rightarrow$ posso calcolare

$$\int_E f(x, y) dx dy$$

E

Un metodo per calcolare l'integrale ci lo
 fornisce il teorema di Fubini.

CASO PARTICOLARE

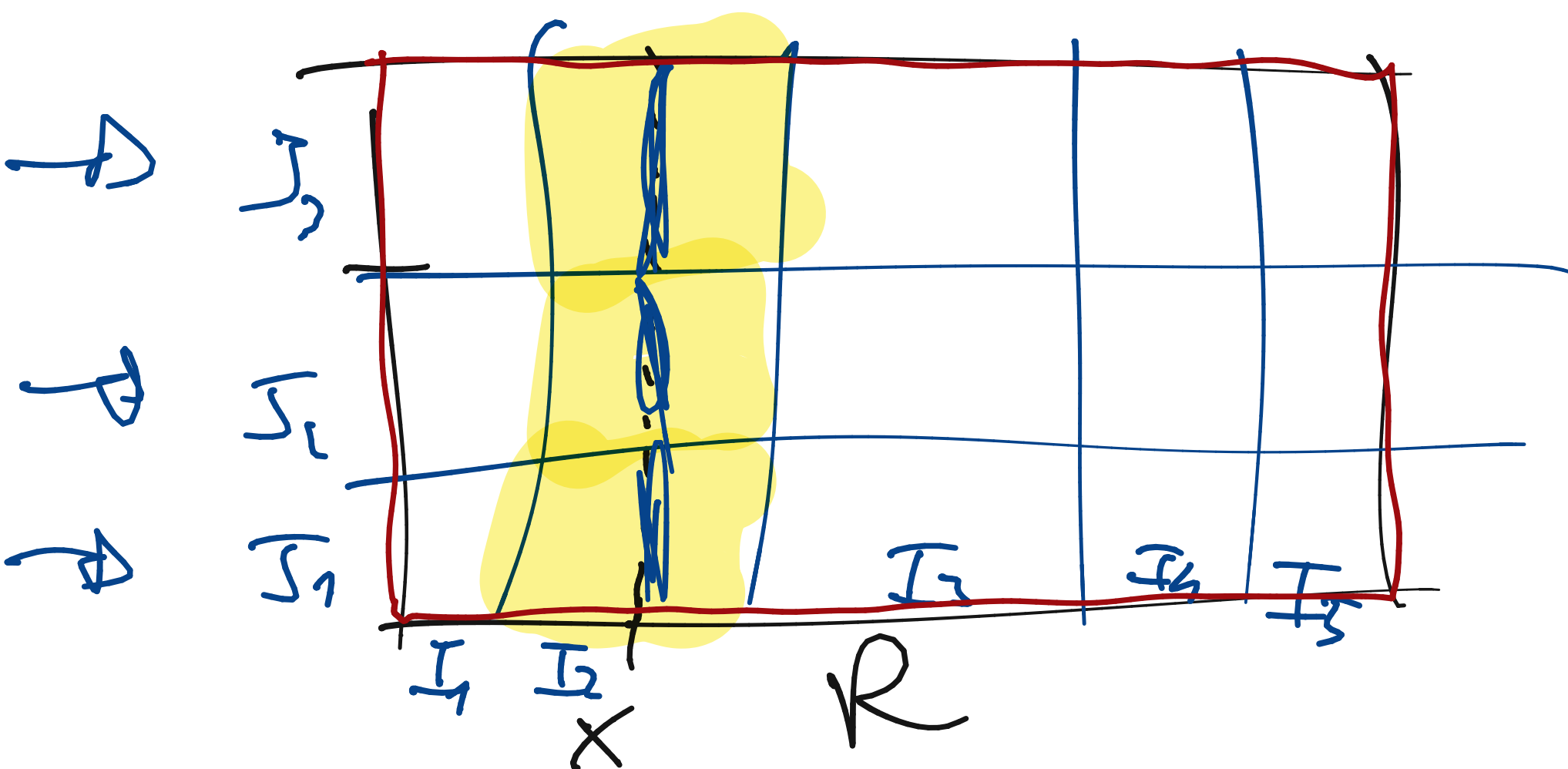
$$\varphi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} \chi_{R_{ij}}$$

φ funzione semplice su R

dove $\lambda_{ij} \in \mathbb{R}$

$$R_{ij} = [x_i - x_{i-1}] \times [y_j - y_{j-1}]$$

$$= I_i \times J_j$$



per $x \in [e, b)$ fissato considero la funzione

$$y \in [c, d) \mapsto \varphi(x, y)$$

è una funzione semplice.

Infatti: $x \in I_2$

$$\varphi(x, y) = \lambda_{2j} \quad \text{se } y \in J_j$$

$j = 1, \dots, m$

$$= \sum_{j=1}^m \lambda_{2j} \chi_{J_j} = \begin{cases} \lambda_{21} & \text{se } y \in J_1 \\ \lambda_{22} & \text{se } y \in J_2 \\ \lambda_{2j} & \text{se } y \in J_j \end{cases}$$

Posso integrare questa funzione semplice
sull'intervallo $[c, d)$

$$\begin{aligned} \int_{[c, d)} \varphi(x, y) dy &= \int_{[c, d)} \sum_{j=1}^m \lambda_{2j} \chi_{J_j} dy = \\ &= \sum_{j=1}^m \lambda_{2j} (y_j - y_{j-1}) \end{aligned}$$

(nel caso in cui $x \in I_2$)

In generale se $x \in I_i \Rightarrow$

$y \mapsto \varphi(x, y)$ è semplice su $[c, d)$

e può essere integrato, l'integrale viene

$$\int_c^d \varphi(x, y) dy = \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} (y_j - y_{j-1})$$

Ma ecco che questo integrale dipende da dove ho preso le $x \in [a, b)$, posso vedere

$\int_c^d \varphi(x, y) dy$ come una funzione della variabile x .

La funzione $[a, b) \ni x \mapsto \int_c^d \varphi(x, y) dy$ assume i valori $\sum_{j=1}^m \lambda_{ij} (y_j - y_{j-1})$ quando $x \in I_i$

$$\int_c^d \varphi(x, y) dy = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \lambda_{ij} (y_j - y_{j-1}) \right) \chi_{I_i}^{(x)}$$

è una funzione semplice, come tale può essere integrato su $[a, b)$

$$\int_a^b \left(\int_c^d \varphi(x, y) dy \right) dx = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \lambda_{ij} (y_j - y_{j-1}) \right) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} (y_j - y_{j-1}) (x_i - x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_{ij} m(R_{ij})$$

$$= \int_R \varphi(x,y) dx dy$$

Teorema Se $\varphi: R \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione semplice allora $\int_R \varphi(x,y) dx dy$

coincide con l'integrale doppio

$$\int_a^b \left(\int_c^d \varphi(x,y) dy \right) dx = \int_R \varphi(x,y) dx dy$$

Dim.: appena fatta.

Teo (Fubini) "per funzioni qualsiasi"

Sia $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ funzione limitata integrabile secondo Riemann. e supponiamo che $\forall x \in [a,b]$ fissata la funzione $y \mapsto f(x,y)$ sia integrabile secondo Riemann nell'intervallo $[c,d]$,

Allora

•) La funzione $F(x) := \int_c^d f(x,y) dy$

è una funzione $[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ ed è integrabile secondo Riemann

$$\bullet) \int_R f(x,y) dx dy = \int_a^b F(x) dx$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx$$

Dim.: f è integrabile in R . $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$

$$\exists \varphi \in \mathcal{F}^+, \psi \in \mathcal{F}^- \text{ t.c. } \int_R \varphi(x,y) dx dy - \int_R \psi(x,y) dx dy < \varepsilon$$

Fissiamo $x \in [a,b)$ e calcoliamo gli integrali di φ, ψ, f in $[c,d)$. Sappiamo che

$$\psi(x,y) \leq f(x,y) \leq \varphi(x,y) \quad \forall y \in [c,d)$$

$$\int_c^d \psi(x,y) dy \leq \int_c^d f(x,y) dy \leq \int_c^d \varphi(x,y) dy$$

Ora osserviamo che $\int_c^d \psi(x,y) dy$ e $\int_c^d \varphi(x,y) dy$ sono funzioni

della variabile $x \in [a,b)$

$$\int_c^d \psi(x,y) dy \leq F(x) \leq \int_c^d \varphi(x,y) dy \quad \forall x \in [a,b)$$

$\Rightarrow$ facciamo l'integrale in $[a,b)$ $\Rightarrow$

$$\int_a^b \int_c^d \varphi(x,y) dy dx - \int_a^b \int_c^d \psi(x,y) dy dx$$

$$= \int_R \varphi(x,y) dx dy - \int_R \psi(x,y) dx dy \leq \varepsilon$$

quindi abbiamo scoperto che $\forall \varepsilon > 0$ posso trovare
 due funzioni, implici Φ e Ψ in $[a,b]$
 tali che $\int_a^b \Phi dx - \int_a^b \Psi dx \leq \varepsilon$ e

$$\Phi \geq F \geq \Psi \Rightarrow \text{zintra da } F \text{ è integrabile in } [a,b]$$

Il primo punto del teorema è dimostrato.

Ora dalla $(*) \Rightarrow$ ottengo che $\int_a^b \int_c^d \varphi(x,y) dy dx \leq \int_a^b F(x) dx \leq \int_a^b \int_c^d \varphi(x,y) dy dx$

$$\Rightarrow \int_R \varphi(x,y) dx dy \leq \int_a^b F(x) dx \leq \int_R \varphi(x,y) dx dy$$

Alla stessa tempo mi ricordo che

$$\int_R \varphi(x,y) dx dy \leq \int_R f(x,y) dx dy \leq \int_R \varphi(x,y) dx dy$$

$$\Rightarrow \left| \int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx dy - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \varepsilon$$

perché

$$\int \varphi(x) dy - \int \varphi(x) dx dy \leq \varepsilon$$

$\Rightarrow$ per arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ trovo che necessariamente

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx dy = \int_a^b f(x) dx$$

$\Rightarrow$ il punto 2 segue

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx dy = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx$$

□

In modo analogo possiamo calcolare l'integrale di una funzione f su un dominio normale.

Se per esempio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile e $E \subseteq \mathbb{R}$ normale rispetto all'asse y

$$\text{Allora } \int_{\mathbb{R}} \chi_E f(x,y) = \int_E f(x,y) \quad \text{perché}$$

calcolata col teorema di Fubini

(cambio di variabili e ipotesi del
teorema)

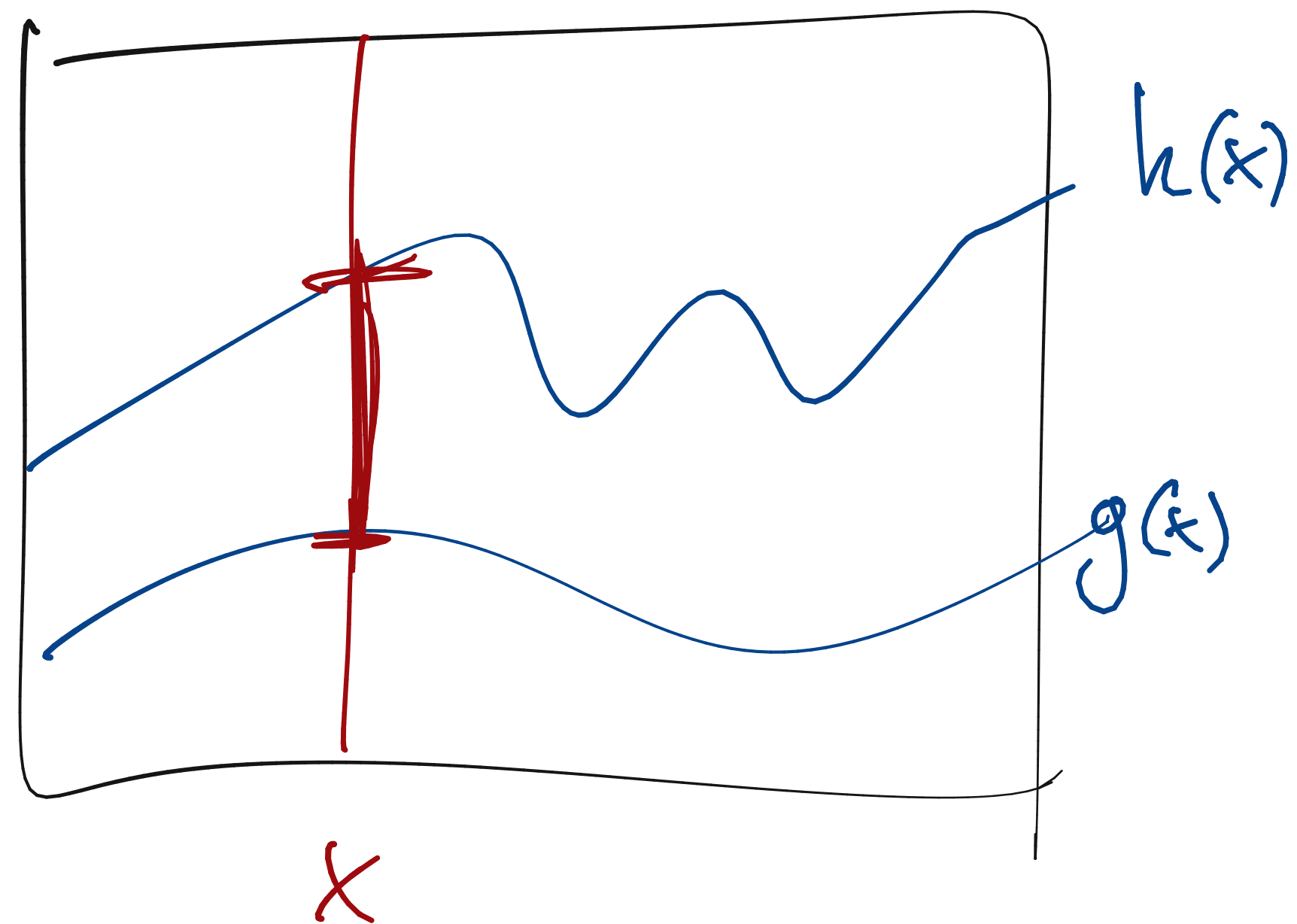
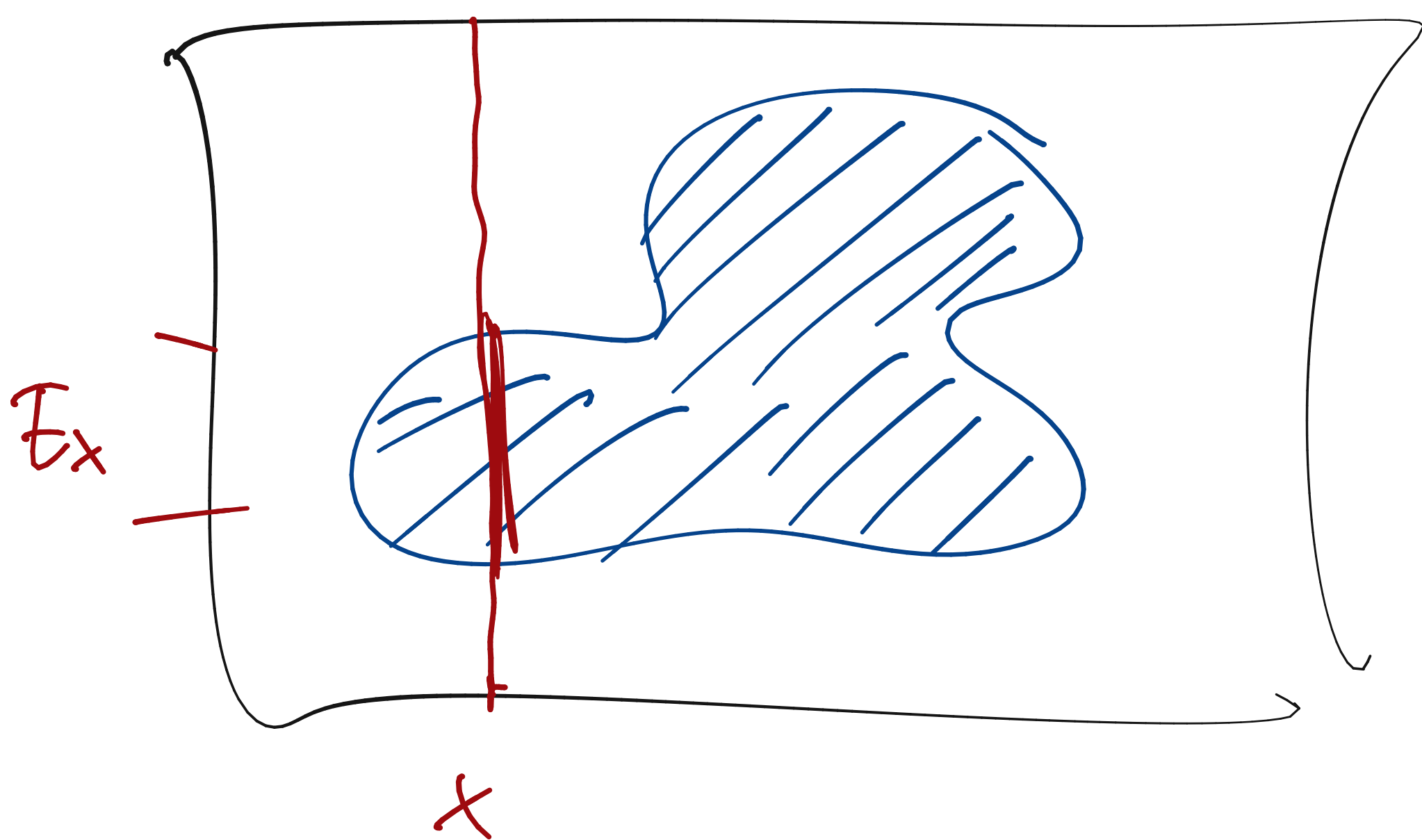
$$\int_R \chi_E f \, dx \, dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y) \chi_E(x,y) \, dy \, dx$$

E è normale $\Rightarrow E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tale che } x \in [a,b] : g(x) \leq y \leq h(x) \right\}$
ad x fissata

$$f(x,y) \chi_E(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in E \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin E \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(x,y) & \text{se } y \in E_x \\ 0 & \text{se } y \notin E_x \end{cases}$$

dove $E_x = \{y \in [c,d] : (x,y) \in E\}$



$\Rightarrow$ enucleo E normale

$$E_x = \{y \in (g(x), h(x))\}$$

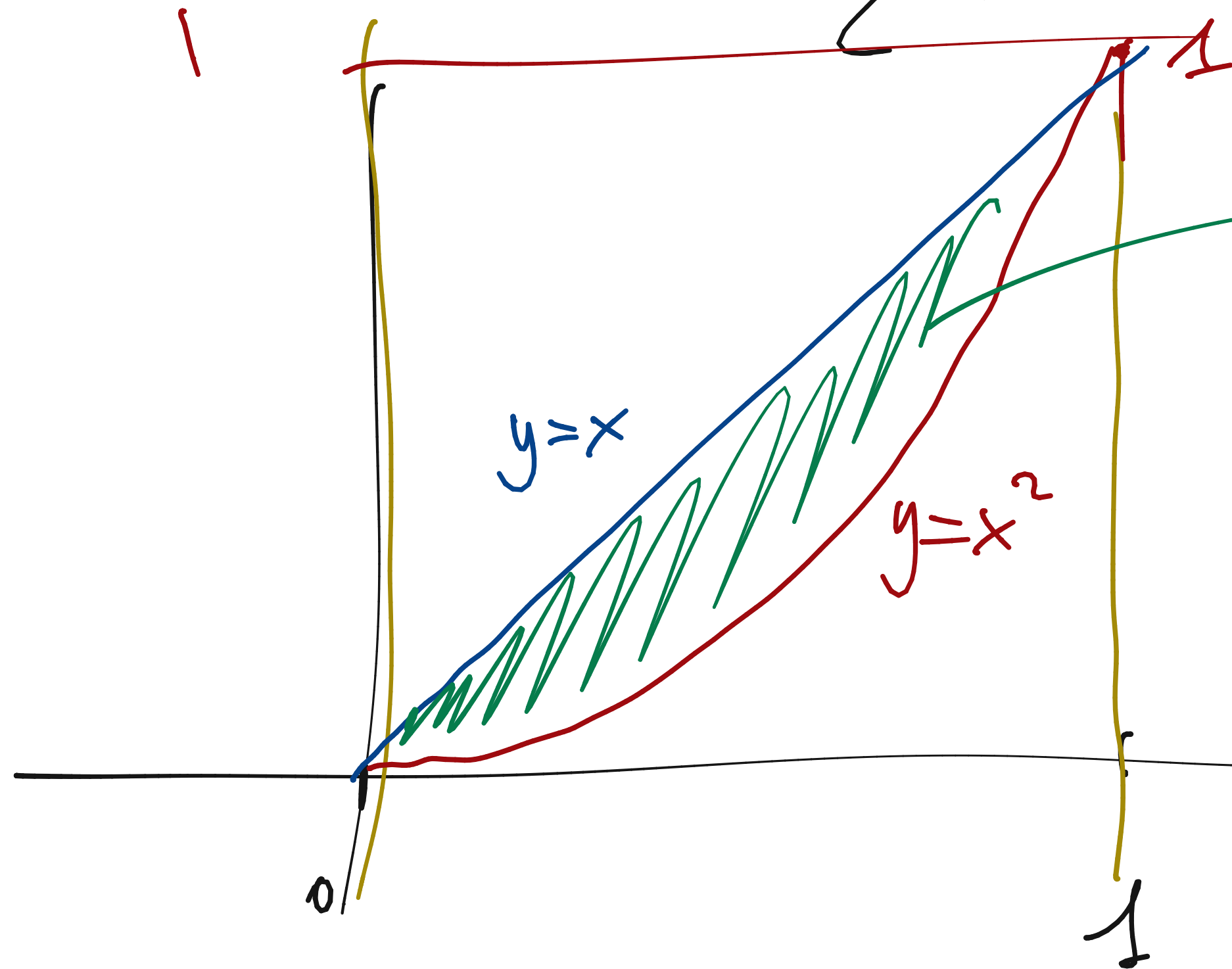
$$\Rightarrow f(x,y) \chi_E(x,y) = f(x,y) \chi_{E_x}(y)$$

$$= \begin{cases} f(x,y) & g(x) < y < h(x) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\int_E f(x,y) dx dy = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) \chi_{E_x}(y) dy dx$$

$$= \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) dy dx$$

Esempio $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1) \ x^2 \leq y \leq x\}$



$$f(x,y) = x^2 y$$

$$\int_E f(x,y) dx dy = ?$$

Teo Fubini

$\Rightarrow$

$$\int_E f(x,y) dx dy = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x f(x,y) dy \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x x^2 y dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2 y^2}{2} \Big|_{y=x^2}^{y=x} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{2} \right) dx = \left(\frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{14} \right) \Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{14} = \frac{7-5}{70} = \frac{2}{70} = \frac{1}{35}$$

Teorema (di Fubini in più di 2 variabili): D

Supponiamo $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ con $R \subseteq \mathbb{R}^n$ un
rettangolo

$$R = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots \times [a_n, b_n)$$

Supponiamo f sia integrabile su R .
Le funzioni $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ soddisfano le seguenti

Condizioni: Fissiamo $x_2, \dots, x_n$ allora

$x_1 \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è integrabile in (a_1, b_1)
 $\forall x_2, \dots, x_n$ fissi. Allora se diciamo

$$R_{n-1} = [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$$

abbiamo che

$$F_1(x_2, x_3, \dots, x_n) := \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1$$

è integrabile in R_{n-1} e

$$\int_{R_{n-1}} F_1 dx_2 \dots dx_n = \int_R f(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Se adesso $x_2 \mapsto F_1(x_2, x_3, \dots, x_n)$ è
integrabile $\forall x_3, x_4, \dots, x_n$ fissi allora

$$F_2(x_3, \dots, x_n) = \int_{a_2}^{b_2} F_1(x_2, \dots, x_n) dx_2$$

è integrabile in $R_{n-2} = [a_3, b_3] \times \dots \times [a_n, b_n]$

$$\int_{R_{n-2}} F_2(x_3, \dots, x_n) = \int_{R_{n-1}} F_1(x_2, \dots, x_n) dx_2 dx_3 \dots dx_n$$

In generale se

$$x_i \mapsto F_{i-1}(x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \text{ è integrabile}$$

in $[a_i, b_i]$ $\forall i = 1, \dots, n-1$

Allora

$$\int_R f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$
$$= \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \right) \right) dx_n$$

Se f è continua su R le ipotesi precedenti
sono sempre soddisfatte

$\Rightarrow f$ continua su $R \Rightarrow$
vale la formula generale