

Supponiamo di avere $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $B \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti
e supponiamo che esista una mappa

$\Phi : A \rightarrow B$ che soddisfa le seguenti proprietà

-) Φ è di classe $C^1(A, B)$
-) Φ è biunivoca
-) $\det(\nabla\Phi(x)) \neq 0 \quad \forall x \in A$

oss: $\nabla\Phi(x) = \begin{pmatrix} \nabla\Phi_1(x) \\ \nabla\Phi_2(x) \\ \vdots \\ \nabla\Phi_n(x) \end{pmatrix}$

dove $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)$

$$\nabla\Phi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\Phi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\Phi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial\Phi_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\Phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$\nabla\Phi(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$\det(\nabla\Phi(x)) \in \mathbb{R}$$

Teorema: Supponiamo $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti limitati
e supponiamo $\Phi : A \rightarrow B$ funzione che soddisfa
le 3 condizioni sopra. Sia $f : B \rightarrow \mathbb{R}$
limitata integrabile secondo Riemann su

B. Allora se indichiamo con $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ le variabili in $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e con $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ le variabili nelle insieme B

$$\int_B f(y) dy = \int_A f \circ \Phi(x) |\det D\Phi(x)| dx$$

Oss.: Nel caso particolare in cui $f = \chi_E$ dove $E \subseteq B$ è un insieme misurabile secondo Lebesgue-Jordan

$$\int_B \chi_E(y) dy = \int_A \chi_E(\Phi(x)) |\det D\Phi(x)| dx$$

||

$$\int_E 1 dy = m(E) \quad \leftarrow \text{questo è il primo integrale}$$

$$\chi_E(\Phi(x)) = \begin{cases} 1 & \text{se } \Phi(x) \in E \\ 0 & \text{se } \Phi(x) \notin E \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & x \in \Phi^{-1}(E) \\ 0 & x \notin \Phi^{-1}(E) \end{cases}$$

$$= \chi_{\Phi^{-1}(E)}(x)$$

il secondo integrale è

$$\int_A \chi_{\Phi^{-1}(E)}(x) |\det \nabla \Phi(x)| dx$$

$$= \int_{\Phi^{-1}(E)} |\det \nabla \Phi(x)| dx$$

Abbiamo trovato la seguente formula

$$\int_E 1 dx = m(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} |\det \nabla \Phi(x)| dx$$

detta anche formula dell'area

è $\Phi: \Phi^{-1}(E) \rightarrow E$ biunivoca

Teorema 2 (del cambio di variabili)

Supponiamo $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ insiemi limitati misurabili secondo Lebesgue e Φ come nel teo precedente

Se $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann

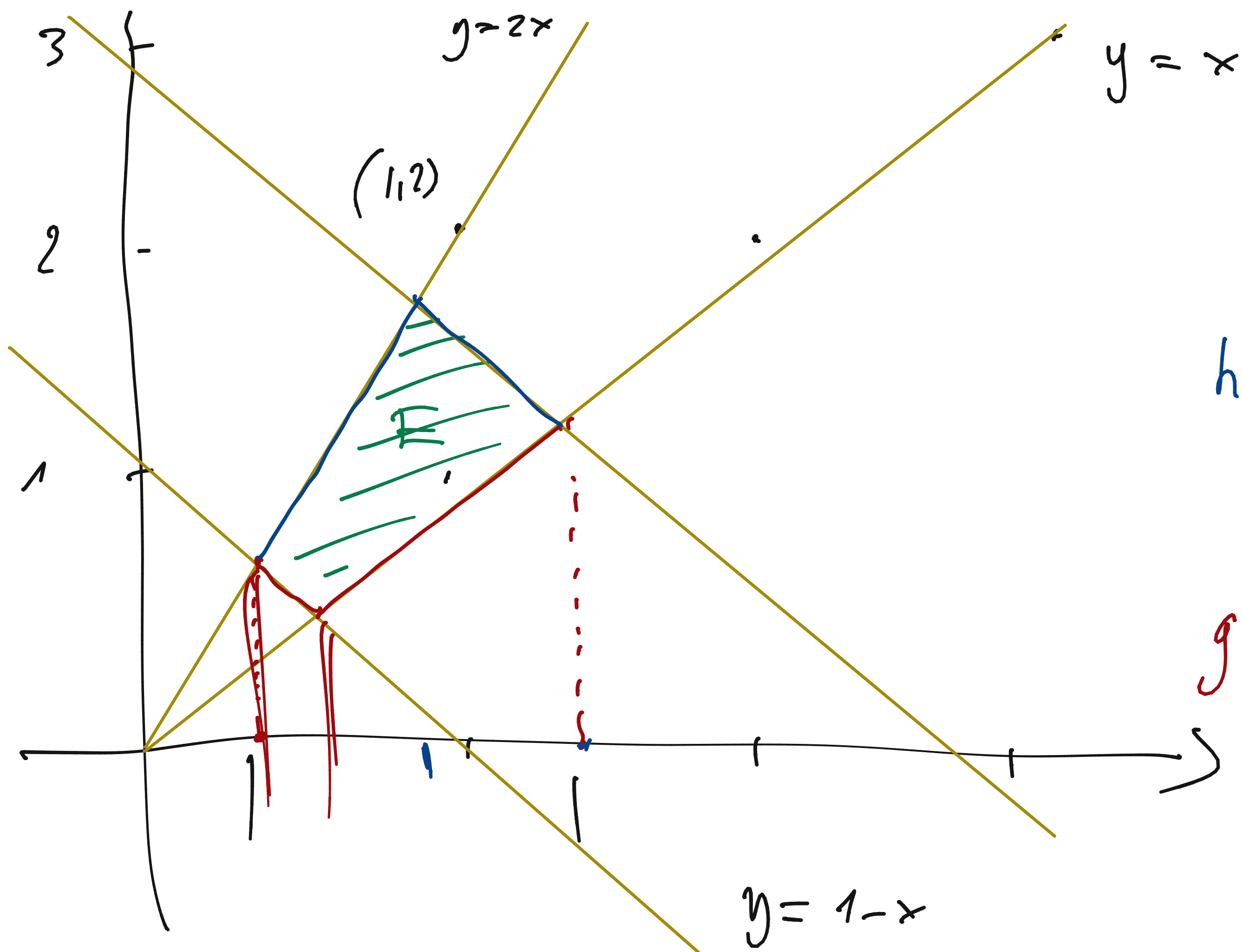
allora

$$\int_B f(y) dy = \int_A f(\Phi(x)) |\det \nabla \Phi(x)| dx$$

Esercizio: Prendiamo $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y < 2x, \underline{1 < x+y < 3}\}$

e consideriamo la funzione $f(x, y) = \frac{1}{2x+y}$

Calcolare $\int_E f(x, y) dx dy$



$$1-x < y < 3-x$$

$$h(x) = \begin{cases} 2x & \frac{1}{3} \leq x < 1 \\ 3-x & 1 \leq x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1-x & \frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2} \\ x & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\int_E f(x,y) dx dy = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{3}{2}} \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y) dy \right) dx =$$

$$= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \int_{1-x}^{2x} \frac{1}{2x+y} dy dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_x^{2x} \frac{1}{2x+y} dy dx + \int_1^{\frac{3}{2}} \int_x^{3-x} \frac{1}{2x+y} dy dx$$

Calcolo per caso.

Risolviamo lo stesso integrale con un cambio di

variabili. $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y < 2x, 1 < x+y < 3 \}$

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < \frac{y}{x} < 2, 1 < x+y < 3 \right\}$$

impongo $u = \frac{y}{x}$ $v = x+y$ in modo che

il dominio E diventi un rettangolo
nelle nuove variabili

$$\text{dalla 'eq. per } u = \frac{y = ux}{\quad} \Rightarrow v = x + ux$$

$$\Rightarrow x = \frac{v}{1+u}$$

$$\Rightarrow y = \frac{uv}{1+u}$$

$$\Phi(u, v) : R = (1, 2) \times (1, 3) \longrightarrow E$$

$$\Phi(u, v) = (\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v)) = (x, y)$$

$$= \left(\frac{v}{1+u}, \frac{uv}{1+u} \right)$$

Formule di cambio di variabili $\Rightarrow$

$$\int_E f(x, y) dx dy = \int_{\Phi^{-1}(E)} f(\Phi(u, v)) |\det D\Phi(u, v)| du dv$$

$$= \int_R f\left(\frac{v}{1+u}, \frac{uv}{1+u}\right) |\det D\Phi(u, v)| du dv$$

$$f = \frac{1}{2x+y}$$

$$= \int_R \frac{1}{2\left(\frac{v}{1+u}\right) + \frac{uv}{1+u}} |\det D\Phi(u, v)| du dv$$

$$= \int_R \frac{1+u}{2v+uv} |\det D\Phi(u, v)| du dv$$

$$\Phi(u, v) = \left(\frac{v}{1+u}, \frac{uv}{1+u} \right) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{uv}{1+u} \right)$$

$$\nabla \Phi(u, v) = \begin{pmatrix} -\frac{v}{(1+u)^2} & \frac{1}{1+u} \\ \frac{v(1+u) - uv}{(1+u)^2} & \frac{u}{1+u} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{v}{(1+u)^2} & \frac{1}{1+u} \\ \frac{v}{(1+u)^2} & \frac{u}{1+u} \end{pmatrix}$$

$$\det(\nabla \Phi(u, v)) = \frac{-uv}{(1+u)^3} - \frac{v}{(1+u)^3}$$

$$= -\frac{v(1+u)}{(1+u)^3} = -\frac{v}{(1+u)^2}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int \frac{1+u}{2v+uv} \cdot \left| -\frac{v}{(1+u)^2} \right| dv du$$

$$= \int_1^2 \int_1^3 \frac{1+u}{2v+uv} \cdot \frac{v}{(1+u)^2} dv du$$

$$= \int_1^2 \int_1^3 \frac{1}{(2+u)(1+u)} dv du$$

$$= \int_1^2 \left(\dots \right) v \Big|_1^3 du$$

$$= 2 \int_1^2 \left(\dots \right) du$$

$$= 2 \int_1^2 \frac{2+u - (1+u)}{(2+u)(1+u)} du = 2 \int_1^2 \frac{1}{1+u} - \frac{1}{2+u} du$$

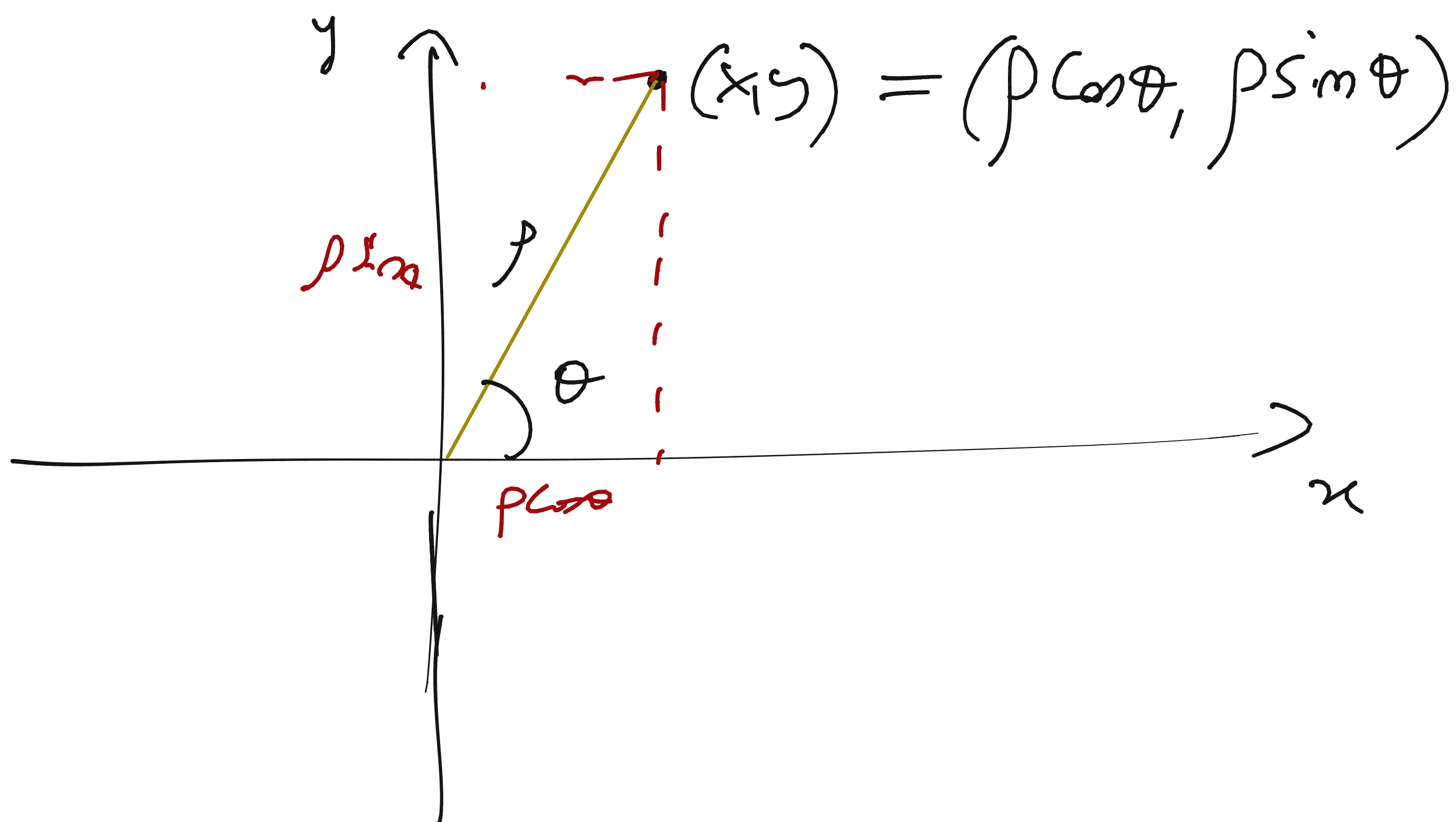
$$= 2 \left(\log(1+u) - \log(2+u) \right) \Big|_{u=1}^{u=2}$$

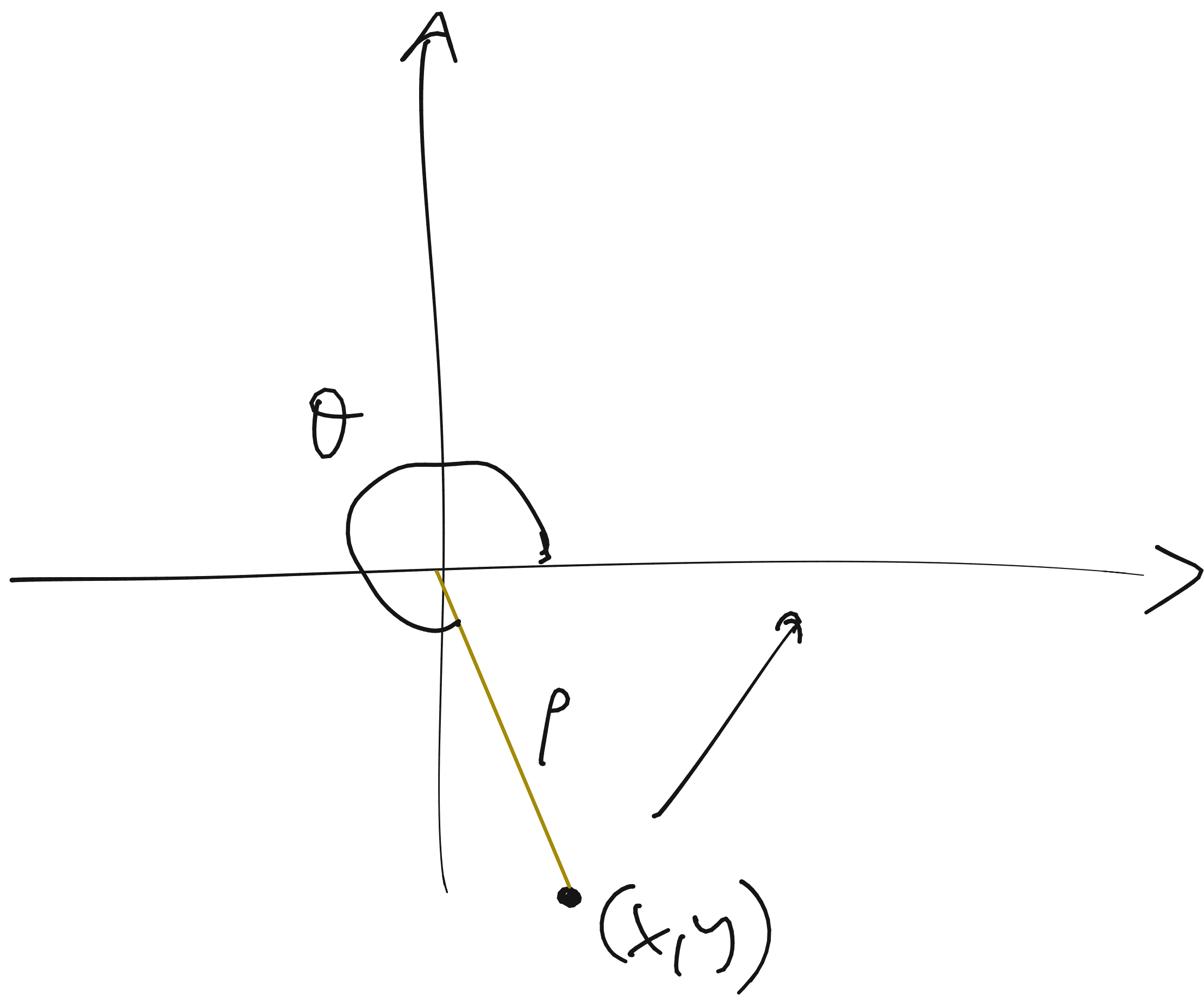
$$= 2 \left(\log 3 - \log 4 - \log 2 + \log 3 \right)$$

Coordinate Polari Consideriamo $\mathbb{R}^2$

e ogni punto $(x, y) \neq (0, 0)$ può essere identificato univocamente con due valori.

Il primo ρ ci dice quanto (x, y) dista dall'origine $\left(\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \right)$ e il secondo valore θ ci dà la direzione in cui si trova il punto (x, y) , θ = angolo formato tra il vettore (x, y) e l'asse positivo dell' x .





$$\rho > 0 \quad \rho \in (0, +\infty)$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

Esiste una mappa $\Phi: (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\Phi(\rho, \theta) = (x, y) = \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

Supponiamo di avere un dominio E in cui vogliamo integrare una funzione f

$$\int_E f(x, y) \, dx \, dy = \int_{\Phi^{-1}(E)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \underbrace{(\det \nabla \Phi(\rho, \theta))}_{\substack{d\rho \\ d\theta}}$$

quanto vale $\nabla \Phi(\rho, \theta)$?

$$\nabla \Phi(\rho, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

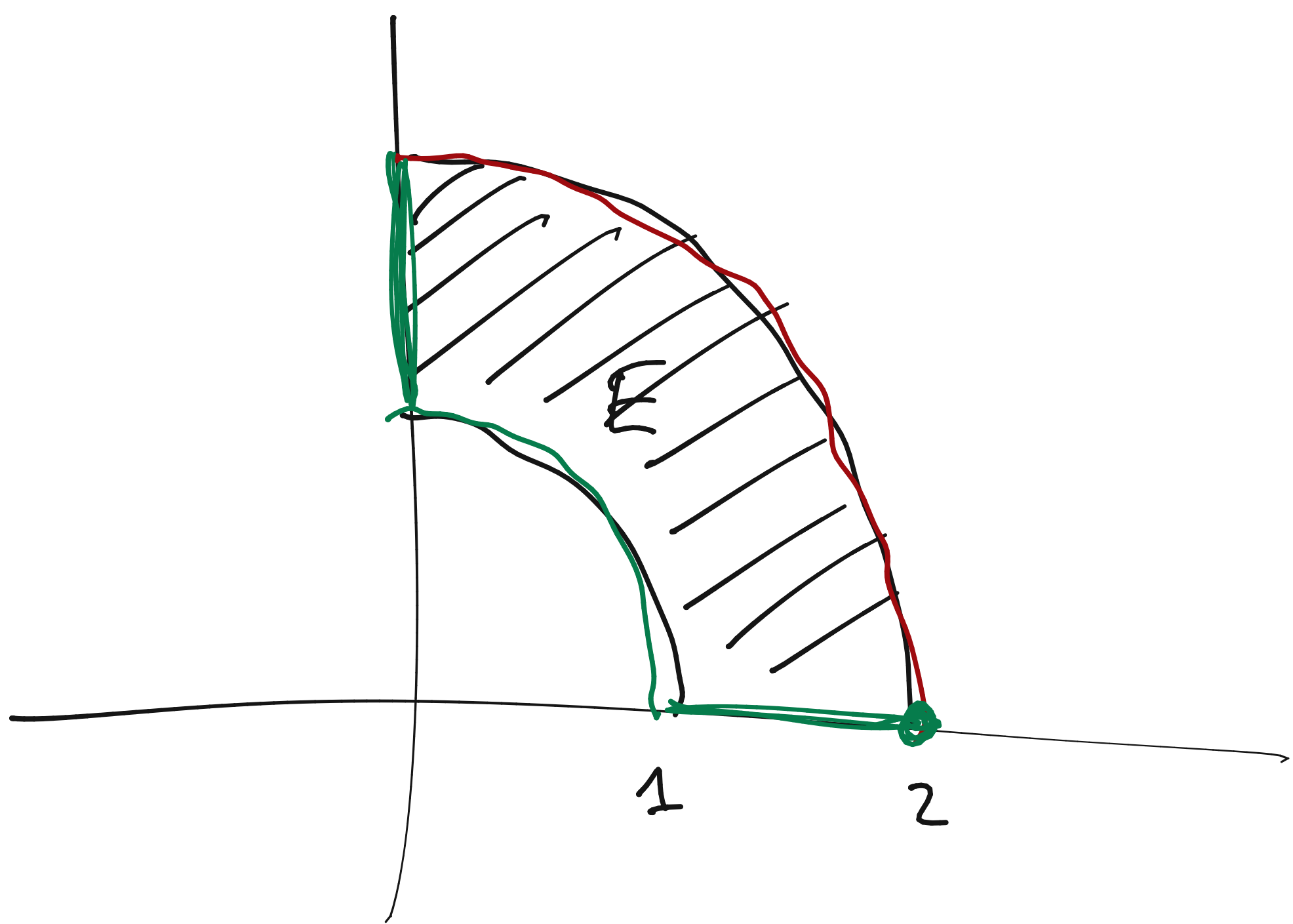
$$\begin{aligned}
 \left| \det \nabla \Phi(\rho, \theta) \right| &= \rho \cos^2 \theta - (-\rho \sin^2 \theta) \\
 &= \rho (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\
 &= \rho
 \end{aligned}$$

Le formule di cambio di variabili in coordinate polari:

$$\int_E f(x, y) dx dy = \int_{\Phi^{-1}(E)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$

Esempio Calcolare l'integrale di $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

sul dominio $E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ t.t. } \begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \end{array} \right\}$



$$\Downarrow \\
 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2$$

$$\int_E \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy =$$

$$E \rightarrow x \in (0, 2) \quad \underline{g(x)} \leq y \leq \underline{h(x)}$$

Pero in coordinate polari:

$$1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 \Rightarrow 1 \leq \rho \leq 2$$

$$x > 0, y > 0 \Rightarrow 0 < \theta < \pi/2$$

$$\Phi^{-1}(E) = \{(\rho, \theta) : 1 \leq \rho \leq 2, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{\rho}$$

$$\int_E \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = \int_{\Phi^{-1}(E)} \frac{1}{\rho} \cdot \rho d\rho d\theta$$

$$= \int_1^2 \int_0^{\pi/2} 1 d\theta d\rho = \int_1^2 \frac{\pi}{2} d\rho = \frac{\pi}{2}.$$

im $\mathbb{R}^3$ Koordinaten zylindrisch &
Koordinaten sferisch.

Le coordinate polari sono definite in modo che

$$\rho \cos \theta = x$$

$$\rho \in (0, +\infty)$$

$$\rho \sin \theta = y$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$

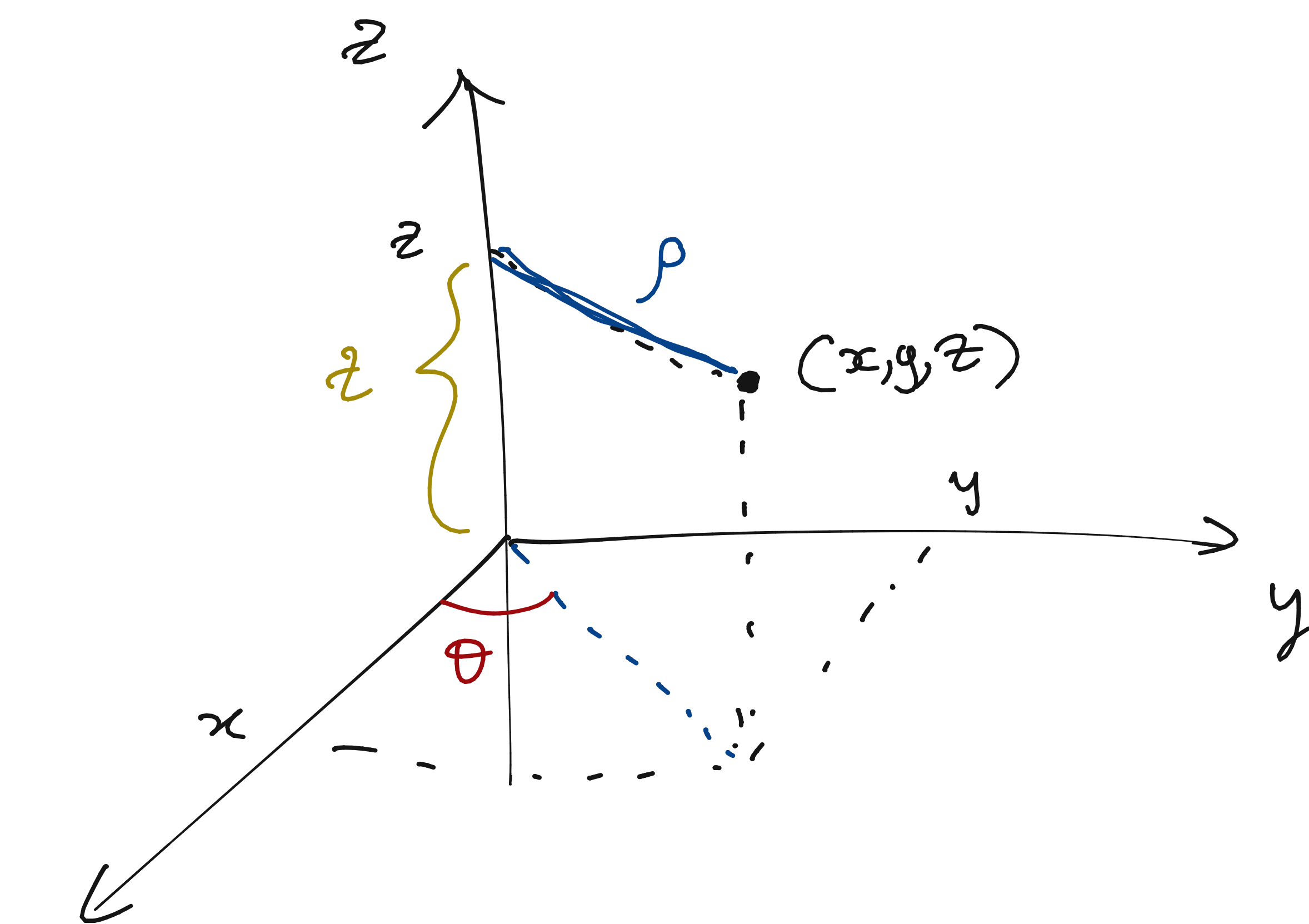
Coordinate cilindriche sono date da (ρ, θ, z) e sono legate alle coordinate di $\mathbb{R}^3$ delle relazioni

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$z = z$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$$



Le mappe di cambio di variabile e

$$\Phi : (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\}$$

$$\Phi(\rho, \theta, z) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$$

$$\Rightarrow \nabla \Phi(\rho, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$$

$$\nabla \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}, \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)$$

$$\det(\nabla \Phi(\rho, \theta, z)) = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (\rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta) \cdot 1 = \rho$$

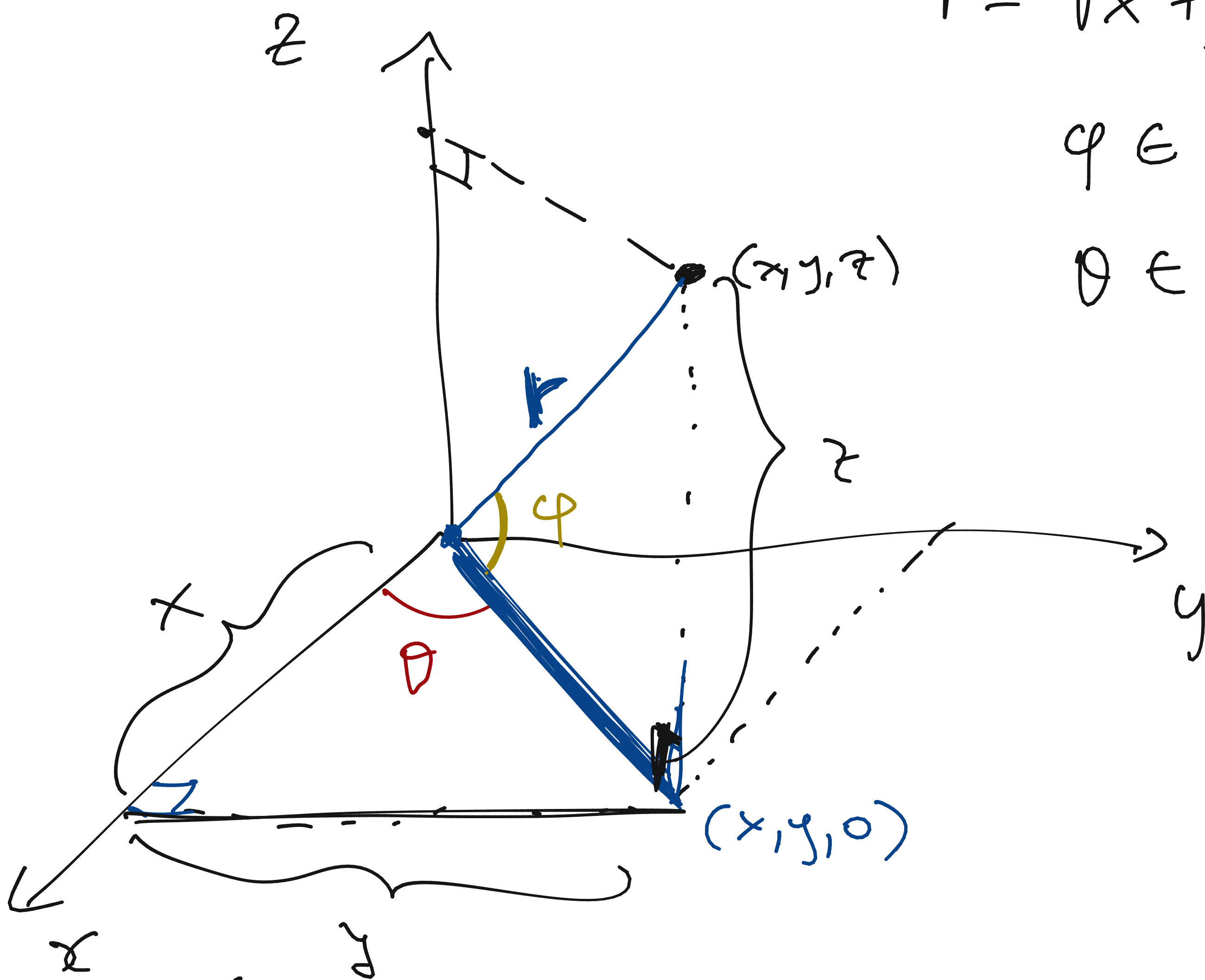
Coordinate sferiche

Anche in questo caso
usiamo queste coordinate per descrivere punti
in $\mathbb{R}^3 \setminus \{on\ e\}$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$



Def: $(r, \theta, \varphi) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$(x, y, 0)$ ha lunghezza $r \cos \varphi$
 il vettore $(x, 0, 0)$ ha lunghezza $r \cos \varphi \cdot \cos \theta$

quindi:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \theta \\ y = r \cos \varphi \sin \theta \\ z = r \sin \varphi \end{cases}$$

La mappa di cambio di variabile Φ

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = (r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi)$$

$$\nabla \Phi(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi & 0 & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\det(\nabla \Phi) = \sin \varphi \cdot \left[r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi + r^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos^2 \theta \right]$$

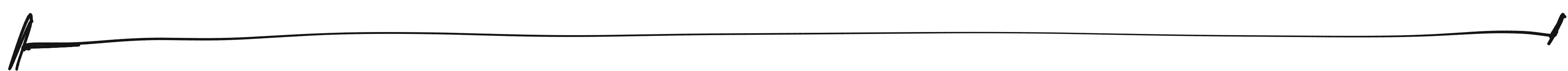
$$+ r \cos \varphi \left[r \cos^2 \varphi \cos^2 \theta + r \cos^2 \varphi \sin^2 \theta \right]$$

$$= r^2 \sin^2 \varphi \cos \varphi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

$$+ r^2 \cos^2 \varphi \cos \varphi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$= r^2 \cos \varphi \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi \cos \varphi$$

$$= r^2 \cos \varphi [\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi] = r^2 \cos \varphi$$



Integrali impropri

Fino ad adesso abbiamo definito l'integrale solo per funzioni limitate e su domini limitati.

Def.: Supponiamo f funzione ≥ 0 ^{limitata} definite su $E \subseteq \mathbb{R}^n$ con E illimitato. Allora f si dice integrabile in senso improprio su E se $\forall R > 0$ f risulta integrabile secondo Riemann su $E \cap B_R(0)$ e inoltre esiste finito il limite

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{E \cap B_R(0)} f(x) dx$$

In tal caso definiamo $\int_E f(x) dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{E \cap B_R(0)} f(x) dx$

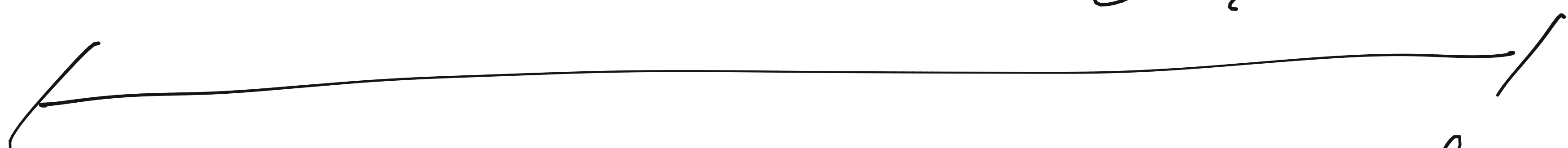
Nel caso in cui ho una funzione illimitata su un dominio E limitato si usa la seguente definizione:

Def.: Supponiamo E limitato ed $f \geq 0$ su E . Supponiamo $\limsup_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = +\infty$

e supponiamo che $\forall \varepsilon > 0$ f rimanga
 limitata su $E \setminus B_\varepsilon(\bar{x})$. Allora f si dice
 integrabile in senso improprio su E se
 f è integrabile su $E \setminus B_\varepsilon(\bar{x}) \quad \forall \varepsilon > 0$ e
 $\exists$ finito il limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E \setminus B_\varepsilon(\bar{x})} f(x) dx$

In tal caso diremo che

$$\int_E f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E \setminus B_\varepsilon(\bar{x})} f(x) dx.$$



Con intermedi può accadere che
 esistano un numero finito di p.li $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots$
 $\bar{x}_m$ tali che $\limsup_{x \rightarrow \bar{x}_i} f(x) = +\infty \quad \forall i = 1, \dots, m$

Allora $\int_E f(x) dx$ con E limitato

si definisce $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E \setminus B_\varepsilon(\bar{x}_1) \setminus B_\varepsilon(\bar{x}_2) \setminus \dots \setminus B_\varepsilon(\bar{x}_m)} f(x) dx$

Se inoltre E è illimitato
 posso definire l'integrale improprio di f su E
 come $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{(E \setminus \bigcup_{i=1}^m B_\varepsilon(\bar{x}_i)) \cap B_{1/\varepsilon}(0)} f(x) dx$

Def.: per ogni funzione f definiamo
la sua parte positiva f^+ e la sua parte
negativa f^- con

$$f^+(x) = \max \{ f(x), 0 \} = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \max \{ -f(x), 0 \} = \begin{cases} -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \\ 0 & \text{se } f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^+ \geq 0 \quad \text{e} \quad f^- \geq 0$$

e inoltre

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

Def.: Integrale improprio per funzioni qualsiasi

Supponiamo $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. Diciamo che f
è integrabile in senso improprio su E se e solo se
 f^+ ed f^- sono integrabili in senso improprio
su E e in tal caso

$$\int_E f(x) dx = \int_E f^+(x) dx - \int_E f^-(x) dx$$

Esempio

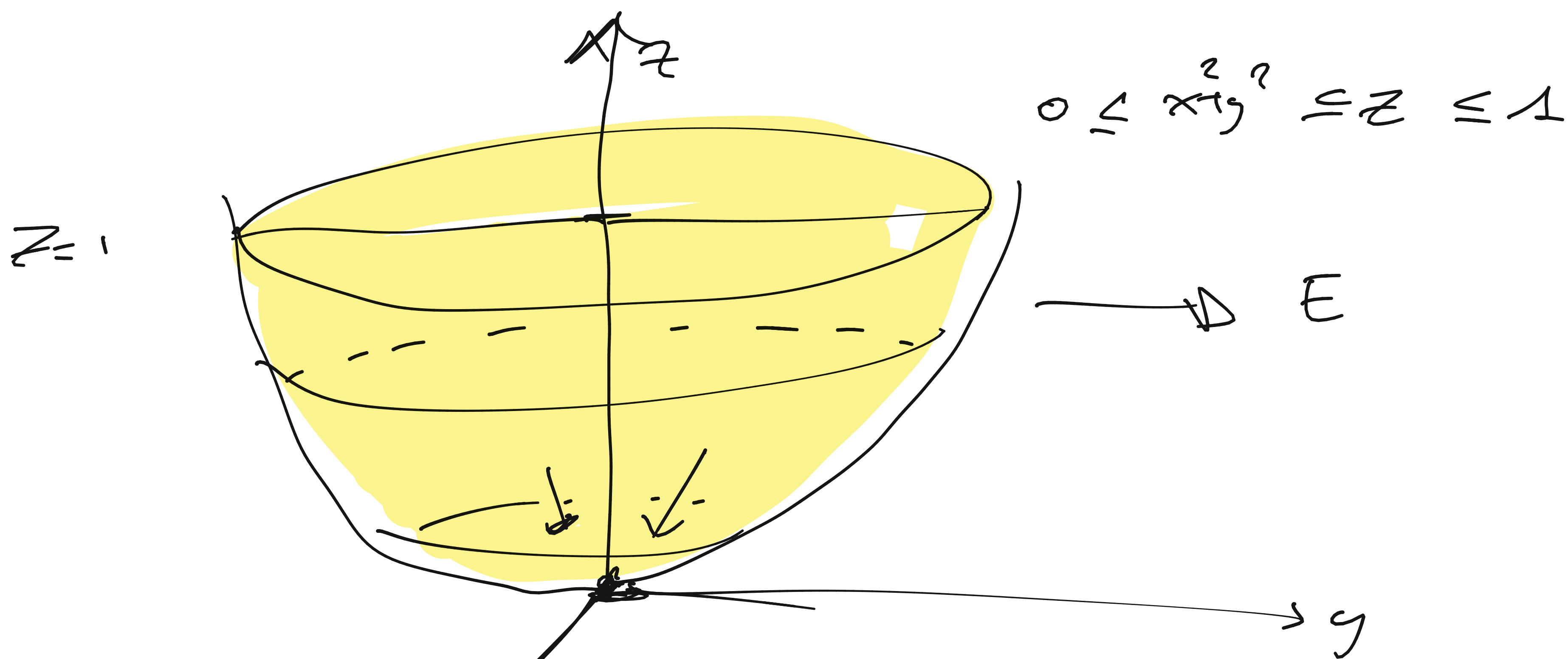
Prendiamo il dominio E

$$E = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } x^2 + y^2 \leq z \leq 1 \}$$

e consideriamo la funzione $f(x, y, z) = z^\alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}$

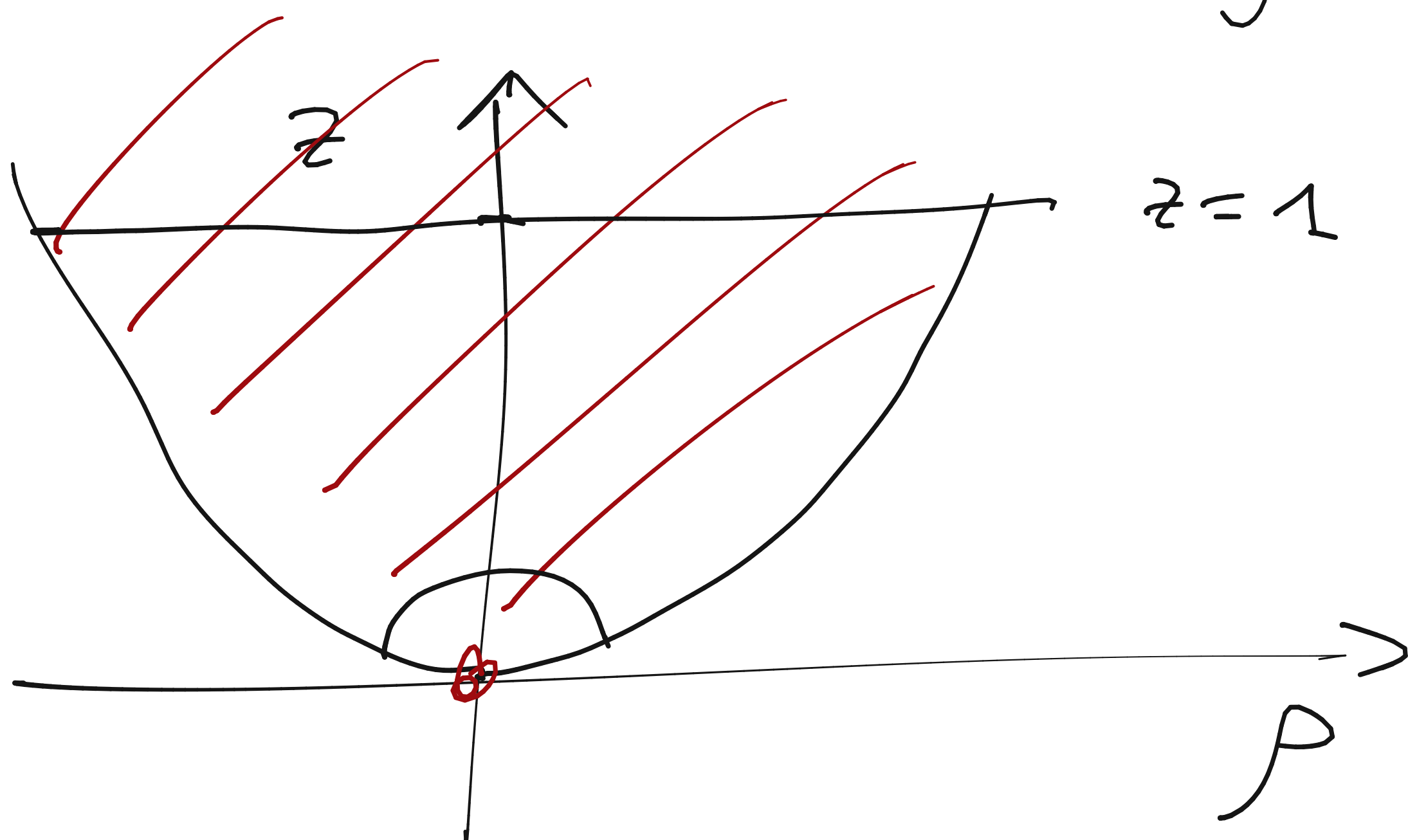
Determinare per quali valori di α la funz. f risulta integrabile in senso improprio su E .

Oss.: z^α $\alpha \geq 0$ risulta essere funzione continua e limitata su E .



Passo in coordinate cilindriche

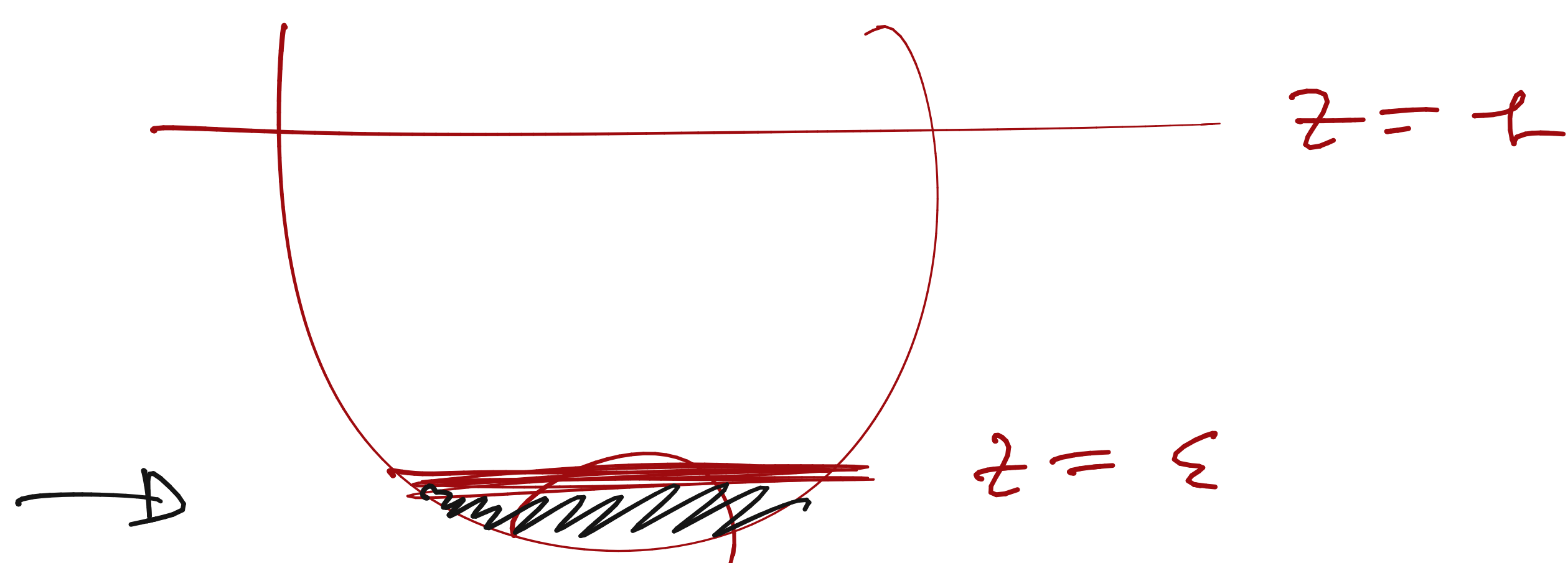
$$x^2 + y^2 = \rho^2 \leq z \leq 1$$



Se $\alpha < 0$ la funzione $f(x, y, z) = z^\alpha$
 tende a $+\infty$ quando $(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)$
 quindi per rispondere al quesito devo
 calcolare un integrale improprio

$$\int_{E \setminus B_\varepsilon(0)} z^\alpha dx dy dz$$

← invece di fare questo



facile questo

$$D_\varepsilon = \{ (x, y, z) : z \in (0, \varepsilon) \}$$

$$\int_{E \setminus D_\varepsilon} z^\alpha dx dy dz$$

di cui calcolare l'integrale su $E \setminus D_\varepsilon$?

$$E = \{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z \leq 1 \}$$

$$D_\varepsilon = \{ (x, y, z) : 0 \leq z \leq \varepsilon \}$$

$$\Rightarrow E \setminus D_\varepsilon = \left\{ (x, y, z) : \varepsilon < z \leq 1, x^2 + y^2 \leq z \right\}$$

In coordinate cilindriche

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ y &= \rho \sin \theta \\ z &= z \end{aligned}$$

$$\int_{E \setminus D_\varepsilon} z^\alpha dx dy dz = \int_{\Phi^{-1}(E \setminus D_\varepsilon)} z^\alpha |\det D\phi| dy d\theta dz$$

$$\Phi^{-1}(E \setminus D_\varepsilon) = \left\{ (p, \theta, t) : \varepsilon \leq z \leq 1 \right. \\ \left. 0 < p \leq \sqrt{z} \right\}$$

$$\begin{aligned} & |\det D\phi| = \rho \\ & \Rightarrow \int_{\varepsilon}^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} z^\alpha \rho \, d\rho d\theta dz \\ & = \int_{\varepsilon}^1 \int_0^{2\pi} z^\alpha \left(\frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{z}} d\theta dz \\ & = \int_{\varepsilon}^1 \int_0^{2\pi} \frac{z^{\alpha+1}}{2} d\theta dz = \int_{\varepsilon}^1 \pi z^{\alpha+1} dz \\ & \alpha = -2 \longrightarrow \int_{\varepsilon}^1 \pi z^{-1} dz = \pi (\log 1 - \log \varepsilon) \\ & \alpha \neq -2 \longrightarrow \int_{\varepsilon}^1 \pi z^{\alpha+1} dz = \pi \frac{1}{\alpha+2} z^{\alpha+2} \Big|_{\varepsilon}^1 \\ & = \frac{\pi}{\alpha+2} (1 - \varepsilon^{\alpha+2}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pi \int_{\varepsilon}^1 z^{\alpha+1} dz =$$

$$= \text{se } \boxed{\alpha = -2} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \pi (-\log \varepsilon) = +\infty$$

f NON INTEGRABILE

$$\text{se } \boxed{\alpha \neq -2} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi}{(\alpha+2)} (1 - \varepsilon^{\alpha+2}) = \begin{cases} \frac{\pi}{\alpha+2} & \alpha > -2 \\ +\infty & \alpha < -2 \end{cases}$$

f E' INTEGRABILE se $\alpha > -2$
 e NON E' se $\alpha \leq -2$

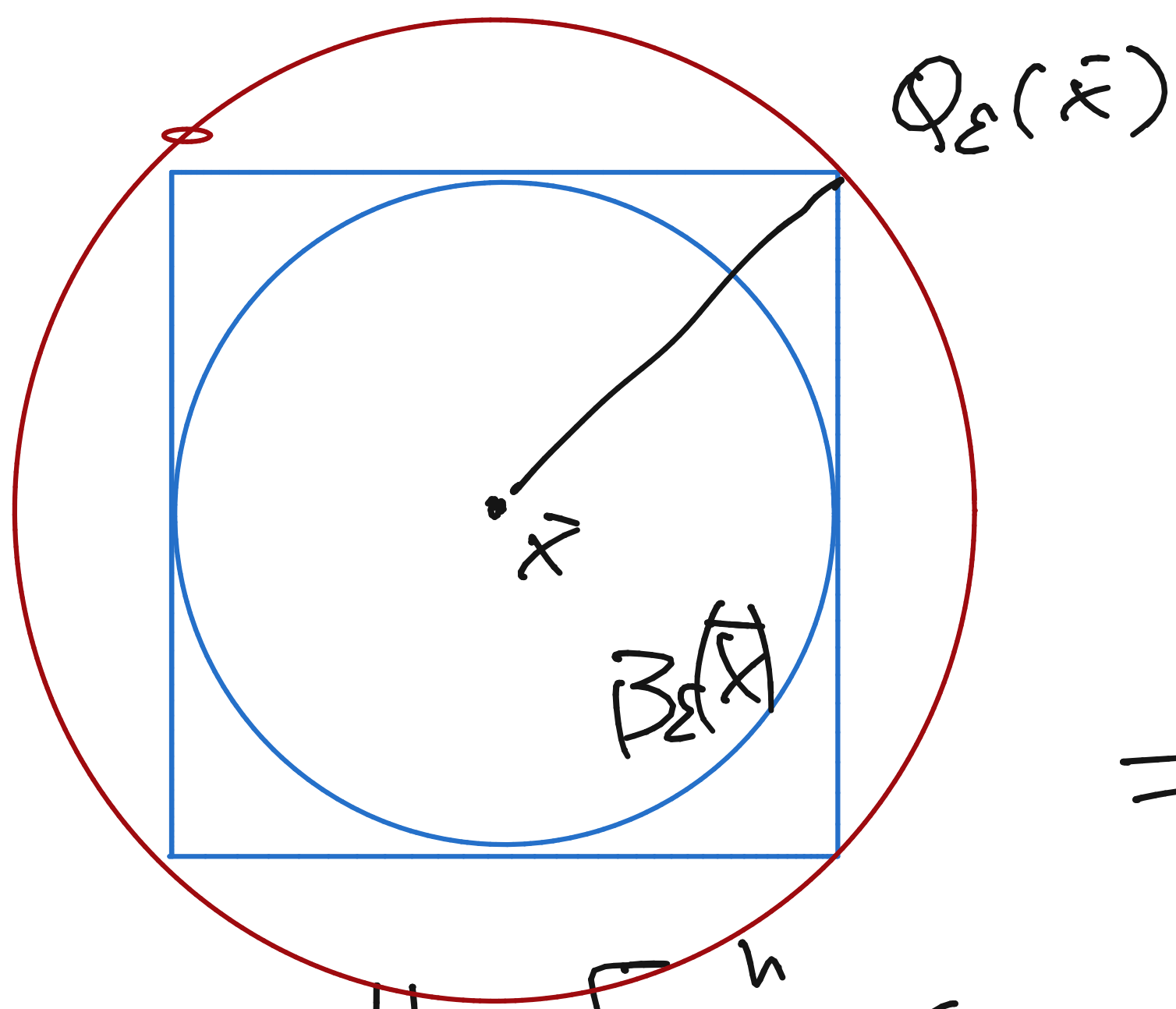
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E \setminus B_\varepsilon(\bar{x})} f(x) dx \stackrel{?}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E \setminus D_\varepsilon} f(x) dx$$

Definizione per $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$
 definiamo il cubo centrato in $\bar{x}$ e con lato 2ε
 l'insieme

$$Q_\varepsilon(\bar{x}) = (\bar{x}_1 - \varepsilon, \bar{x}_1 + \varepsilon) \times (\bar{x}_2 - \varepsilon, \bar{x}_2 + \varepsilon) \times \dots \times (\bar{x}_n - \varepsilon, \bar{x}_n + \varepsilon)$$

Oss. Le palle di raggio ε centrate in $\bar{x}$
 e' contenute in $Q_\varepsilon(\bar{x})$.

$$B_\varepsilon(\bar{x}) \subseteq Q_\varepsilon(\bar{x})$$



facciamo vedere che $\forall x \in B_\varepsilon(\bar{x})$
 si ha $x \in Q_\varepsilon(\bar{x})$
 se $x \in B_\varepsilon(\bar{x})$

$$\Rightarrow \|x - \bar{x}\| < \varepsilon$$

$$\|x - \bar{x}\| = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2 \right]^{1/2} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall i = 1, \dots, n \quad |x_i - \bar{x}_i| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow x_i \in (\bar{x}_i - \varepsilon, \bar{x}_i + \varepsilon) \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$x \in Q_\varepsilon(\bar{x})$$

OSS.: $Q_\varepsilon(\bar{x}) \subseteq B_{\sqrt{n}\varepsilon}(\bar{x})$

$$\text{Se } x \in Q_\varepsilon(\bar{x}) \Rightarrow x \in B_{\sqrt{n}\varepsilon}(\bar{x})$$

in fatti se $x \in Q_\varepsilon(\bar{x}) \Rightarrow |x_i - \bar{x}_i| < \varepsilon$
 $\forall i = 1, \dots, n$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}_i|^2 < n\varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \|\bar{x} - x\| < \sqrt{n}\varepsilon \Rightarrow x \in B_{\sqrt{n}\varepsilon}(\bar{x})$$

Abbiamo mostrato che $\forall \varepsilon > 0$

$$B_\varepsilon(\bar{x}) \subseteq Q_\varepsilon(\bar{x}) \subseteq B_{\sqrt{n}\varepsilon}(\bar{x})$$

Sia $f: E \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ } $E \subseteq \mathbb{R}^n$ vogliamo calcolare
 l'integrale improprio di f su E limitato

$$\left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E \setminus B_\varepsilon(\bar{x})} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E \setminus Q_\varepsilon(\bar{x})} f(x) dx \right]$$

dim.: Anzitutto osserviamo che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E \setminus B_\varepsilon(\bar{x})} f(x) dx \text{ esiste sempre}$$

esiste perché la funzione $\bar{I}$ monotona non crescente.

$$\varepsilon \rightarrow \int_{E \setminus B_\varepsilon(\bar{x})} f(x) dx$$

$$\triangleleft \text{infatti se } \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \Rightarrow B_{\varepsilon_2}(\bar{x}) \supseteq B_{\varepsilon_1}(\bar{x})$$

$$\Rightarrow E \setminus B_{\varepsilon_2}(\bar{x}) \subseteq E \setminus B_{\varepsilon_1}(\bar{x})$$

$$\Rightarrow \int_{E \setminus B_{\varepsilon_2}(\bar{x})} f(x) dx \leq \int_{E \setminus B_{\varepsilon_1}(\bar{x})} f(x) dx$$

perché $f \geq 0$

$$\left[\begin{aligned} &\text{se } A \subseteq B \text{ e } f \geq 0 \quad \int_B f(x) dx \geq \int_A f(x) dx \\ &\text{perché } \int_B f(x) dx - \int_A f(x) dx = \int_{B \setminus A} f(x) dx \geq 0 \end{aligned} \right]$$

il fatto che $\varepsilon \rightarrow \int_{E \setminus B_\varepsilon(\bar{x})} f(x) dx$ è monotona

implica l'esistenza del limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{E \setminus B_\varepsilon(\bar{x})} f(x) dx$.

$$\text{Supponiamo che } B_\varepsilon(\bar{x}) \subseteq Q_\varepsilon(\bar{x}) \subseteq B_{\sqrt{n}\varepsilon}(\bar{x})$$

questo implica che

$$\int_{E \setminus B_{\sqrt{n}\varepsilon}(\bar{x})} f(x) dx \leq \int_{E \setminus Q_\varepsilon(\bar{x})} f(x) dx \leq \int_{E \setminus B_\varepsilon(\bar{x})} f(x) dx$$

Osservo ANCHE che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E \setminus B_\varepsilon(\bar{x})} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E \setminus B_{\varepsilon\sqrt{n}}(\bar{x})} f(x) dx \quad (*)$$

il teorema di Lebesgue dice che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E \setminus Q_\varepsilon(\bar{x})} f(x) dx = (*)$$

Teorema Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ una funzione definita su E limitato e misurabile secondo P-J. e sia $\bar{x} \in \bar{E}$ un punto tale che $\limsup_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = +\infty$. Supponiamo

$\forall \varepsilon > 0$ $f|_E$ integrabile secondo Riemann su $E \setminus B_\varepsilon(\bar{x})$. Allora $f|_E$ integrabile in senso improprio su E e vale

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \int_{E \setminus Q_\varepsilon(\bar{x})} f(x) dx \text{ esiste finito.}$$

Oss.: Se R_ε è una figura piana
 una regione tale che $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{diam } R_\varepsilon = 0$
 e $\exists c, C > 0$ costanti tali che

$$B_{c\varepsilon}(\bar{x}) \subseteq R_\varepsilon \subseteq B_{C\varepsilon}(\bar{x})$$

$$\forall \varepsilon > 0$$

Allora f è integrabile in senso improprio
 su E se e solo se $\exists$ finito il limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E \setminus R_\varepsilon} f(x) dx = \int_E f(x) dx.$$

In modo analogo posso trattare integrali su
 domini illimitati. Se R_ε è una figura
 piana per cui $\text{diam}(R_\varepsilon) \rightarrow +\infty$
 quando $\varepsilon \rightarrow \infty$ e $\exists c, C > 0$ tali che

$$B_{c\varepsilon}(0) \subseteq R_\varepsilon \subseteq B_{C\varepsilon}(0) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \text{allora}$$

$f: E \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ funzione limitata su
 dominio E illimitato, f è integrabile in
 senso improprio su E se e solo se $\exists$ finito
 il limite $\lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \int_{E \cap R_\varepsilon} f(x) dx$ e tale limite
 coincide con $\int_E f(x) dx$.