

Equazioni differenziali

Trovare una funzione $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (o da un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) tale che

$$u^{(n)} = f(t, u, u', u'', \dots, u^{(n-1)})$$

①

dove $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$.

abbiamo ~~trovare~~ una funzione di $t \in A$

Potremmo trovare di fronte al problema di dover trovare $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ che risolve un sistema di eq. differenziali

$$\begin{cases} u_1' = f_1(t, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ u_2' = f_2(t, u_1, u_2, \dots, u_k) \\ \vdots \\ u_k' = f_k(t, u_1, u_2, \dots, u_k) \end{cases}$$

②

Un'eq. della forma ① si dice eq. diff. di ordine n . Il sistema di eq. nelle ② è del primo ordine.

$$\begin{cases} u_1^{(n)} = f_1(t, u, u', u'', \dots, u^{(n-1)}) \\ \vdots \end{cases}$$

↖ ordine n .

Il sistema di eq. ② si può esprimere come un'equazione unica

$$u' = f(x, u)$$

dove $u: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$ (da trovare) e

$$f: \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_k)$$

L'eq. ① può essere scritta come un'eq. di ordine 1 vettoriale.

$$u^{(m)} = f(x, u, u', \dots, u^{(m-1)}) \quad \text{①}$$

Si pone

$$u_1 := u, \quad u_2 := u', \quad u_3 := u'', \dots$$

$$\dots u_n := u^{(m-1)} \quad \text{e di conseguenza}$$

$$\text{da } \text{①} \Rightarrow u^{(m)} = u'_n = f(x, u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$u'_1 = u' = u_2$$

$$u'_2 = u'' = u_3$$

$$\vdots$$

$$u'_{n-1} = u^{(m-1)} = u_n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u'_1 = u_2 \\ u'_2 = u_3 \\ \vdots \\ u'_{n-1} = u_n \\ u'_n = f(x, u_1, u_2, \dots, u_n) \end{cases}$$

③

è un caso particolare di ② (dove $k=m$)

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(A, y_1, y_2, \dots, y_n) = (y_2, y_3, \dots, y_n, f(t, y))$$

$F: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ e il sistema (3) è diventato

$$u' = F(A, u)$$

esemp.:

$$u^{(2)} = f(t, u, u') = g(t, u)$$

$$f(t, y_1, y_2) = y_1^2 - y_2 t$$

$$u'' = u^2 - u' t$$

ESEMPI Equazioni a variabili separabili:

$$u'(t) = f(u(t)) g(t)$$

dove u è una funzione incognita che dipende da $t \in \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ assegnate

Procedimento per risolverle è separare ciò che dipende direttamente da t da ciò che coinvolge la u : dividiamo entrambi per $f(u(t))$

$$\boxed{\frac{u'(t)}{f(u(t))} = g(t)} \quad (*)$$

Ci accorgiamo che, se chiamiamo Z una primitiva di $\frac{1}{f}$ ($Z' = \frac{1}{f}$)

Allora se si ottiene $\frac{d}{dt} (Z(u(t)))$

$$\begin{aligned} \text{infatti } \frac{d}{dt} Z(u(t)) &= Z'(u(t)) u'(t) \\ &= \frac{1}{f(u(t))} u'(t) \end{aligned}$$

Se invece chiamiamo G una primitiva di g
 $\Rightarrow$ integriamo entrambi i membri dell'eq. (*) e

otteniamo

$$\boxed{Z(u(t)) = G(t) + C}$$

Se adesso Z^{-1} denota l'inversa di Z
 $\Rightarrow$ applico Z^{-1} a entrambi

$$\boxed{u(t) = Z^{-1}(G(t) + C)}$$

esempio

$$u'(t) = \frac{u(t)}{1+t^2}$$

è un'eq. a variabili separabili perché si divide

forma $u'(t) = f(u(t)) g(t)$

$$g(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad f(u) = u$$

$$\Rightarrow \frac{u'(t)}{u(t)} = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{integro}$$

$$\downarrow \frac{d}{dt} \log |u(t)|$$

$$\searrow \frac{d}{dt} \arctan t$$

$$\log |u(t)| = \arctan t + c$$

$$\begin{aligned} |u(t)| &= e^{\arctan t + c} = e^c \cdot e^{\arctan t} \\ &= \alpha e^{\arctan t} \quad \alpha > 0 \end{aligned}$$

$$|u(t)| = \alpha e^{\arctan t}$$

per determinare α la soluzione $\alpha e^{\arctan t}$

o $-\alpha e^{\arctan t}$ ha bisogno di ulteriori

informazioni sulla u che sto cercando

Ad esempio si può imporre che per un

certo tempo fissato $t_0 = 0$ la funzione
 $u(t_0) = u(0) = 1$

$$x \quad u(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \left| u(0) \right| = 1 = \alpha e^{\arctan 0}$$
$$-1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1$$

$$u(0) = 1 \quad u(t) = \alpha e^{\arctan t} = e^{\arctan t}$$

$$\textcircled{u(0) = -1} \quad u(t) = -\alpha e^{\arctan t} = -e^{\arctan t}$$

DS:
$$u(t) = \begin{cases} \alpha e^{\arctan t} & t < \bar{t} \\ -\alpha e^{\arctan t} & t \geq \bar{t} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ si vede che $u'(\bar{t})$ non
è ben definito

$$\Rightarrow u'(\bar{t}) = \frac{u(\bar{t})}{1 + \bar{t}^2}$$

Equazioni LINEARI del PRIMO ORDINE

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t) \quad \text{dove } a, b$$

soln function complete.

$$\text{Se } b=0 \Rightarrow u'(t) = a(t)u(t)$$

$$\Rightarrow \frac{u'(t)}{u(t)} = a(t) \Rightarrow \log |u(t)| = A(t) + c$$

$$(*) \quad |u(t)| = \alpha e^{A(t)} \quad \alpha > 0$$

Quindi se il segno di $u(t)$ p.s.s. si
esprime l'eq. (*) come $u(t) = \beta e^{A(t)}$
($A' = a$) $\beta \in \mathbb{R}$

Se $b \neq 0$ si cerca una solution della
forma $u(t) = c(t)e^{A(t)}$

$$\Rightarrow \boxed{u' = a(t)u + b(t)}$$

$$u = c(t)e^{A(t)}$$

$$\Rightarrow c'(t)e^{A(t)} + c(t)a(t)e^{A(t)} = a(t)c(t)e^{A(t)} + b(t)$$

$$\Rightarrow c'(t) = b(t)e^{-A(t)}$$

$$\text{quindi } u \Rightarrow c(t) = \int b(s)e^{-A(s)} ds + k$$

$$\text{Se } u = c(t)e^{A(t)} = e^{A(t)} \left(\int b(s)e^{-A(s)} ds + k \right)$$

Verifico che tale espressione fa u

soluzione $u'(t) = a(t)u(t) + b(t)$

$$u'(t) = a(t)e^{A(t)} \left[\int b(s)e^{-A(s)} ds + k \right]$$

$$+ e^{A(t)} b(t)e^{-A(t)}$$

$$= a(t) \underbrace{e^{A(t)} \left[\int b(s)e^{-A(s)} ds + k \right]}_{u(t)} + b(t)$$

$$= a(t)u(t) + b(t)$$

esempio

$$u'(t) = \frac{3u}{t} + t^2 + 1$$

lineare con $a(t) = \frac{3}{t}$ e $b(t) = t^2 + 1$

$$A(t) = 3 \log |t| \Rightarrow b(s) \cdot e^{-A(s)}$$

$$\Rightarrow (t^2 + 1) t^{-3 \log |t|} = \frac{t^2 + 1}{|t|^3}$$

$$\Rightarrow u(t) = e^{3 \log |t|} \left[\int \frac{s^2 + 1}{|s|^3} ds + k \right]$$

$$\int \frac{s^2 + 1}{|s|^3} ds = \int \frac{s^2 + 1}{s^3} ds = \int \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}$$

$$= \log t - \frac{1}{2t^2}$$

$$\int \frac{s^2 + 1}{-s^3} ds = \dots$$

$$u(t) = t^3 \left[\log t - \frac{1}{2t^2} + k \right] \quad t > 0$$

$$-t^3 \left[-\log t + \frac{1}{2t^2} - k \right] \quad t < 0$$

La ed ~~espresso~~ ~~integrare~~ $u(1) = \pi$
 $\downarrow$
 t_0

$$u(t) = t^3 \left[\log t - \frac{1}{2t^2} + k \right]$$

$$u(1) = \log 1 - \frac{1}{2} + k = \pi$$

$$k = \pi + \frac{1}{2}$$

$$u'(t) = \frac{3u}{t} + t^2 + 1$$

$$u' = f(t, u)$$

$$f(t, u) = \frac{3u}{t} + t^2 + 1$$

il dominio di f non
 contiene l'asse $\{t=0\}$

$$\begin{cases} u' = \frac{3u}{t} + t^2 + 1 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

potrei chiederti di trovare una soluzione

per $u(1) = \alpha$

$t_0 = 1$ (temp: pos.ivi)

e trovare il valore α per il quale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$$

Equazioni di Bernoulli:

$$u'(t) = a(t)u(t) + b(t)u(t)^\alpha$$

con $\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$

Se $\alpha = 0 \Rightarrow u'(t) = a(t)u(t) + b(t)$

$$\alpha = 1 \Rightarrow u'(t) = a(t)u(t) + b(t)u(t) \\ = (a(t) + b(t))u(t)$$

è separabile

Per risolvere l'eq. di Bernoulli faccio un
cambio di variabile e chiamo $z = u^{1-\alpha}$

$$\Rightarrow u = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$u' = \left(\frac{1}{1-\alpha} \right) z^{\frac{1}{1-\alpha}-1} z'$$

Sostituisco in Bernoulli:

$$\frac{1}{1-\alpha} z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} z' = a(t) z^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(t) z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

→ divido per $z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ e ottengo

$$\frac{1}{1-\alpha} z' = a(t) z^{\frac{1}{1-\alpha}} - \frac{\alpha}{1-\alpha} + b(t)$$

$$= a(t) z + b(t)$$

$$z' = (1-\alpha)a(t)z + (1-\alpha)b(t)$$

z eq. lineare

$$z(t) = e^{(1-\alpha)A(t)} \left[\int (1-\alpha)b(s) e^{-(1-\alpha)A(s)} ds + K \right]$$

$$u(t) = z(t)^{\frac{1}{1-\alpha}} = e^{A(t)} \left[(1-\alpha) \int b(s) e^{-(1-\alpha)A(s)} ds + K \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Esempio $u'(t) = \frac{1}{t^2} + \frac{u^2}{t^2}$

bermulli: $\alpha = 2$ $a(t) = b(t) = \frac{1}{t^2}$

$$A(t) = \int \frac{1}{s^2} ds = -\frac{1}{t} \quad (1-\alpha) = -1$$

$$\int b(s) e^{-(1-\alpha)A(s)} ds = \int \frac{1}{s^2} e^{-\frac{1}{s}} ds =$$

$$= -e^{-\frac{1}{t}}$$

$$u(t) = e^{-\frac{1}{t}} \left(+e^{-\frac{1}{t}} + K \right) \quad K \in \mathbb{R}$$

Oss: $u' = \frac{u}{t^2} + \frac{u^2}{t^2} = \frac{1}{t^2} (u + u^2)$

t e variabili separabili

$$\frac{u'}{u + u^2} = \frac{1}{t^2}$$

esercizio: Risolvere

Equazioni lineari a coeff Costanti di ordine n.

$$u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + a_{n-2} u^{(n-2)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = 0 \quad (1)$$

dove $a_i \in \mathbb{R}$ fissati $i = 0, \dots, n-1$

polinomio caratteristico associato a (1) e

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

Sia $p(\lambda)$ questo polinomio.

S: calcolare le radici del polinomio $p(\lambda)$

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

se λ_i sono tutti distinti, allora alcune soluzioni di (1) sono esponenziali delle forme

$$u(A) = e^{\lambda_i t} \Rightarrow \text{verifica funzione}$$

Osserviamo anche che

Se u_1 e u_2 sono soluzioni di (1)
 $\Rightarrow$ anche $\alpha u_1 + \beta u_2$ è soluzione.

$$\Rightarrow u(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t}$$

$$\alpha_i \in \mathbb{R}$$

queste sono tutte e sole le soluzioni di (1).

esmp $u'' + u = 0$ polin. caratteristico

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 \quad \text{che ha radici} \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= i \\ \lambda_2 &= -i \end{aligned}$$

$$u(t) = \alpha_1 e^{it} + \alpha_2 e^{-it}$$



$$\alpha_1 (\cos t + i \sin t) + \alpha_2 (\cos t - i \sin t)$$

se $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \Rightarrow u_1(t) = 2\alpha \cos t$

se $\alpha_1 = -\alpha_2 \Rightarrow u_2(t) = 2i\alpha \sin t$

$$\Rightarrow \hat{u}_1(t) = \cos t \quad \text{soluzione}$$

$$\hat{u}_2(t) = \sin t \quad \text{soluzione}$$

PROBLEMA DI CAUCHY

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Considereremo il problema di Cauchy per funzioni scalari $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dove $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione assegnata continua
 $t_0 \in \mathbb{R}$ $u_0 \in \mathbb{R}$ assegnati

OSS.: $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ incognita del problema
è da cercarsi nella classe di funzioni
derivabili in t , $\forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow f(t, u(t))$ è
continua nel tempo t , perché composizione
di funzioni continue

Se u deve essere derivabile e soddisfa

$u'(t) = f(t, u(t)) \Rightarrow u$ deve essere di classe C^1 .

Allora possiamo applicare il teo. fondamentale
del calcolo integrale

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t u'(s) ds &= u(t) - u(t_0) \\ &= \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \end{aligned}$$

Quindi una soluzione di $u'(t) = f(t, u(t))$
deve anche soddisfare la condizione

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Se cerco una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Allora sto cercando una $u \in C^1$ che soddisfi

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \quad (*)$$

Viceversa, se $u \in C^0$ soddisfa $(*)$ Allora

essendo u continua $\Rightarrow f(s, u(s))$ è continua in s

$\Rightarrow$ derivo rispetto a t nel membro d. destra
e trovo

$$f(t, u(t)) = u'(t) \text{ è continua}$$

quindi $u \in C^1$ e soddisfa l'eq. diff.

Inoltre dall'eq. $(*)$ se pongo $t = t_0$ ottengo

$$u(t_0) = u_0$$

Avendo u soddisfa il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

$(**)$

Lemma $u \in C^1$ soddisfa il pr. di Cauchy
se, solo se $u \in C^0$ e soddisfa $(*)$

Per risolvere il pr. di Cauchy non è sufficiente trovare una funzione continua che soddisfa

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

Thm 1 Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e sia $(t_0, u_0) \in A$.

Sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1(A)$

Allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

(*)

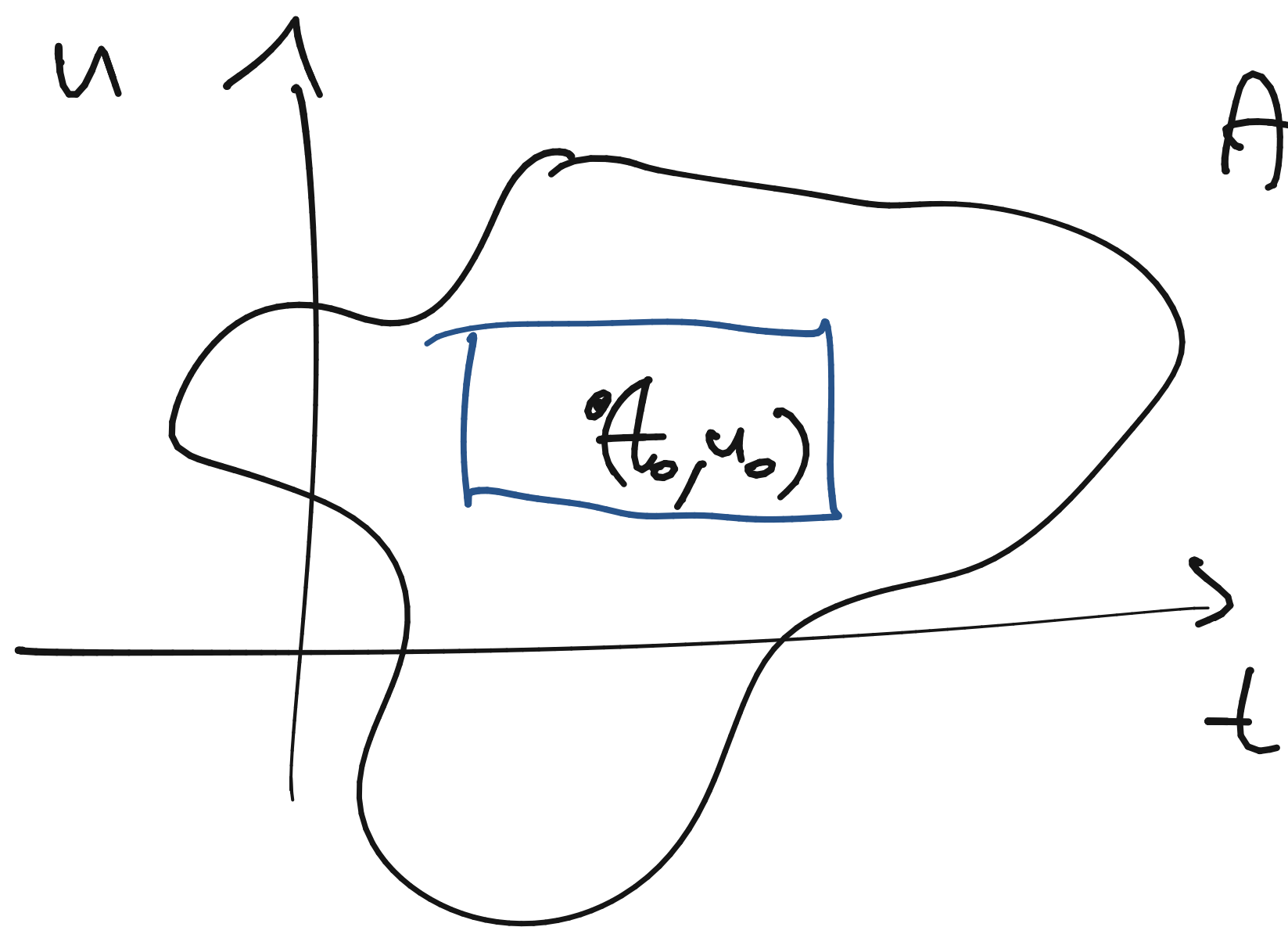
è risolvibile in un intorno di t_0 .

Ovvero $\exists$ un intorno $I = (t_0 - r, t_0 + r)$ di t_0 ed esiste una e una sola funzione $u \in C^1(I)$ che soddisfa (**).

Dim.: Come osservato possiamo mostrare che esiste I ed $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \quad \forall t \in I$$

(*)



Essendo A aperto

$\exists$ un rettangolo della

forma $[t_0 - r, t_0 + r] \times [u_0 - p, u_0 + p]$

totamente contenuto in A .

Essendo $R = [t_0 - r, t_0 + r] \times [u_0 - p, u_0 + p]$ chiuso

e limitato lo di $|f|$ esiste minimo in R

$$M := \max_{(t,u) \in R} |f(t,u)|$$

Anche $\left| \frac{\partial f}{\partial u} \right|$ è continua in R e quindi
esiste minimo anche

$$L := \max_{(t,u) \in R} \left| \frac{\partial f}{\partial u}(t,u) \right|$$

$r_0 \leq r$
 $\Rightarrow$

E infine possiamo $r_0 = \min \left\{ r, \frac{\rho}{M} \right\}$

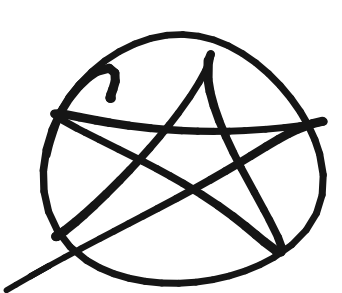
Procediamo in modo ricorsivo definendo

$$u_0: I \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{con } u_0(t) = u_0$$

$$u_{k+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_k(s)) ds \quad \forall t \in I$$

dove $I = (t_0 - r_0, t_0 + r_0)$. u_0 definita una
successione di funzioni $u_k: I \rightarrow \mathbb{R}$

Scopo DELLA DIMOSTRAZIONE far vedere che le

funzioni u_k convergono uniformemente ad una
 $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ che risolve 

Step 1: Mostriamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$

si ha che $|u_k(t) - u_0| \leq \rho \quad \forall t \in I$

Per induzione •) per $k=0$ $u_k(t) \equiv u_0$

la $|u_k(t) - u_0| = 0$ è soddisfatta

•) Per induzione. Supponiamo $|u_k(t) - u_0| \leq \rho$

$\forall t \in I$ facciano vedere che

$$|u_{k+1}(t) - u_0| \leq \rho \quad \forall t \in I$$

Ricordiamo che $u_{k+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_k(s)) ds$

$$\text{Allora } u_{k+1}(t) - u_0 = \int_{t_0}^t f(s, u_k(s)) ds$$

$$\Rightarrow |u_{k+1}(t) - u_0| \leq \int_{t_0}^t |f(s, u_k(s))| ds \quad t > t_0$$

Per hp induttiva il punto $(s, u_k(s)) \in R$

$$s \in (t_0 - r_0, t_0 + r_0) \quad |u_k(s) - u_0| \leq \rho \Rightarrow$$

$$u_k(s) \in [u_0 - \rho, u_0 + \rho]$$

$$(s, u_k(s)) \in (t_0 - r_0, t_0 + r_0) \times [u_0 - \rho, u_0 + \rho] \subseteq R$$

$$R = [t_0 - r, t_0 + r] \times [u_0 - \rho, u_0 + \rho]$$

$$\Rightarrow |f(s, u_k(s))| \leq M \quad \text{tutto da } s > t_0$$

$$|u_{k+1}(t) - u_0| \leq \int_{t_0}^t M ds = M |t - t_0| \leq M r_0$$

$$\leq M \frac{\rho}{M} = \rho \quad \forall t \in I$$

Se vogliamo essere precisi

$$t \geq t_0 \quad |u_{k+1}(t) - u_0| \leq \int_{t_0}^t M ds \leq \rho$$

$$t < t_0 \quad |u_{k+1}(t) - u_0| \leq \int_t^{t_0} M ds = M(t_0 - t) \\ \leq M r_0 \leq \rho$$

Step 2 Faccious verben per induzione de

$$|u_k(t) - u_{k-1}(t)| \leq M L \frac{|t - t_0|^k}{k!} \quad \forall k \geq 1 \\ \forall t \in I$$

•) $k=1$ faccious verben de

$$|u_1(t) - u_0(t)| \leq M |t - t_0| \quad \forall t \in I$$

$$u_1(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_0(s)) ds$$

$$u_0(t) \equiv u_0$$

$$\Rightarrow |u_1(t) - u_0(t)| = \left| \int_{t_0}^t f(s, u_0) ds \right|$$

$$\text{se } t > t_0 \quad \leq \int_{t_0}^t |f(s, u_0)| ds \leq \int_{t_0}^t M ds = M(t - t_0)$$

$$\text{se } t < t_0 \quad \leq \int_t^{t_0} |f(s, u_0)| ds \leq \int_t^{t_0} M ds = M(t_0 - t)$$

•) Per induzione: Supponiamo $\forall t \in I$

$$|u_k(t) - u_{k-1}(t)| \leq M L \frac{|t - t_0|^k}{k!}$$

feriscono vedere che $\forall t \in I$

$$|u_{k+1}(t) - u_k(t)| \leq M L^k \frac{(t-t_0)^{k+1}}{(k+1)!}$$

~~+~~

$$u_{k+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_k(s)) ds$$

$\Rightarrow$

$$u_k(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_{k-1}(s)) ds$$

$$u_{k+1}(t) - u_k(t) = \int_{t_0}^t f(s, u_k(s)) - f(s, u_{k-1}(s)) ds$$

se $t > t_0$

$$\Rightarrow |u_{k+1}(t) - u_k(t)| \leq \int_{t_0}^t |f(s, u_k(s)) - f(s, u_{k-1}(s))| ds$$

$f \in C^1 \Rightarrow f$ derivabile nelle seconde variabili $\Rightarrow$ per il teo. Lagrange
 $\exists \xi \in (u_k(s), u_{k-1}(s))$

$$f(s, u_k(s)) - f(s, u_{k-1}(s)) = \frac{\partial f}{\partial u}(s, \xi) (u_k(s) - u_{k-1}(s))$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |u_{k+1}(t) - u_k(t)| &\leq \int_{t_0}^t \left| \frac{\partial f}{\partial u}(s, \xi) \right| |u_k(s) - u_{k-1}(s)| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t L M L^{k-1} \frac{(s-t_0)^{k-1}}{(k-1)!} ds \end{aligned}$$

$$= L^k M \frac{(t-t_0)^{k+1}}{(k+1)!} \quad \forall t > t_0, \quad t \in I$$

Se $t < t_0$ si fa allo stesso modo (esercizio)

Step 3: Dello step 2 segue che

$$\begin{aligned} \|u_k - u_{k-1}\|_{\infty, I} &= \sup_{t \in I} |u_k(t) - u_{k-1}(t)| \\ &\leq \sup_{t \in I} L^{k-1} M \frac{|t-t_0|^k}{k!} = \frac{L^{k-1} M}{k!} r_0^k \end{aligned}$$

$$I = (t_0 - r_0, t_0 + r_0) \quad \forall k \geq 1$$

$$\text{La serie } \sum_{k=1}^{+\infty} \|u_k - u_{k-1}\|_{\infty, I} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{L^{k-1} M}{k!} r_0^k$$

$$= M \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(L r_0)^k}{k!} = \frac{M}{L} (e^{L r_0} - 1)$$

quindi la serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (u_k - u_{k-1}) \quad \text{converge assolutamente}$$

nell'intervallo I . $\exists \hat{u}: I \rightarrow \mathbb{R}$
 tale che $S_n = \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k-1})$

converge uniformemente ed $\hat{u} : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\sum_{k=1}^n (u_k - u_{k-1}) = u_n - u_0 \xrightarrow{\text{uniformemente}} \hat{u}$$

$$\Rightarrow u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (u_k - u_{k-1}) = \hat{u} + u_0 =: u$$

dove la serie converge uniformemente

$$\Rightarrow u_n \rightarrow u \text{ uniformemente su } I.$$

Oss.:

$$u_n(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_{n-1}(s)) ds$$

Sono funzioni continue $\forall n$.

$\Rightarrow u : I \rightarrow \mathbb{R}$ è limite unif. di
funz. continue $\Rightarrow u$ continua

Mostrando $n \rightarrow +\infty$ nell'eq. $\boxed{\dots}$ ottengo

$$u_n(t) \rightarrow u(t) \quad e \quad \int_{t_0}^t f(s, u_{n-1}(s)) ds \xrightarrow{\quad} \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$$

$$\Rightarrow u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \quad \forall t \in I$$

l'esistenza di u è ok.

Comment: 2m le con. 2270772:

$u_n \rightarrow u$ unif. in I

dove: verificare che $f(s, u_{n-1}(s)) \rightarrow f(s, u(s))$
unif. in (t_0, t_0) .

Per esercizio mostrare questa cosa.

[Suss.]: $\|f(s, u_{n-1}(s)) - f(s, u(s))\|_{\infty, [t, t_0]} \rightarrow 0$

$$\underbrace{|f(s, u_{n-1}^{(s)}) - f(s, u^{(s)})|}_{\leq L} \leq L \underbrace{|u_{n-1}^{(s)} - u^{(s)}|}_{\leq \epsilon}$$

$\square$