

SERIE DI FOURIER

Una serie di Fourier è una serie di funzioni delle forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

Se f è una funzione data $f: [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$

possiamo trovare dei coefficienti a_0, a_k, b_k $k \geq 1$

tal che $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k \geq 1} a_k \cos kx + b_k \sin kx$?

Def: Dato un intervallo $[a, b)$ diremo che

$f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è continua a tratti se $\exists$ una partizione di $[a, b)$, $t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ tal che f è continua su (t_{i-1}, t_i) $\forall i = 1, \dots, n$.

Diremo che $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è C^1 a tratti se

$\forall i = 1, 2, \dots, n$ la funzione f è $C^1((t_{i-1}, t_i))$

e inoltre esistono i limiti $\lim_{x \rightarrow t_{i-1}^+} f(x) = f(t_{i-1}^+)$

e $\lim_{x \rightarrow t_i^-} f(x) = f(t_i^-)$ e sono limiti $\in \mathbb{R}$

ed esistono anche i limiti dei rapporti incrementali

$$f'(t_i^-) := \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(t_i + h) - f(t_i^-)}{h} \in \mathbb{R}$$

$$f'(t_{i-1}^+) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t_{i-1} + h) - f(t_{i-1}^+)}{h} \in \mathbb{R}$$

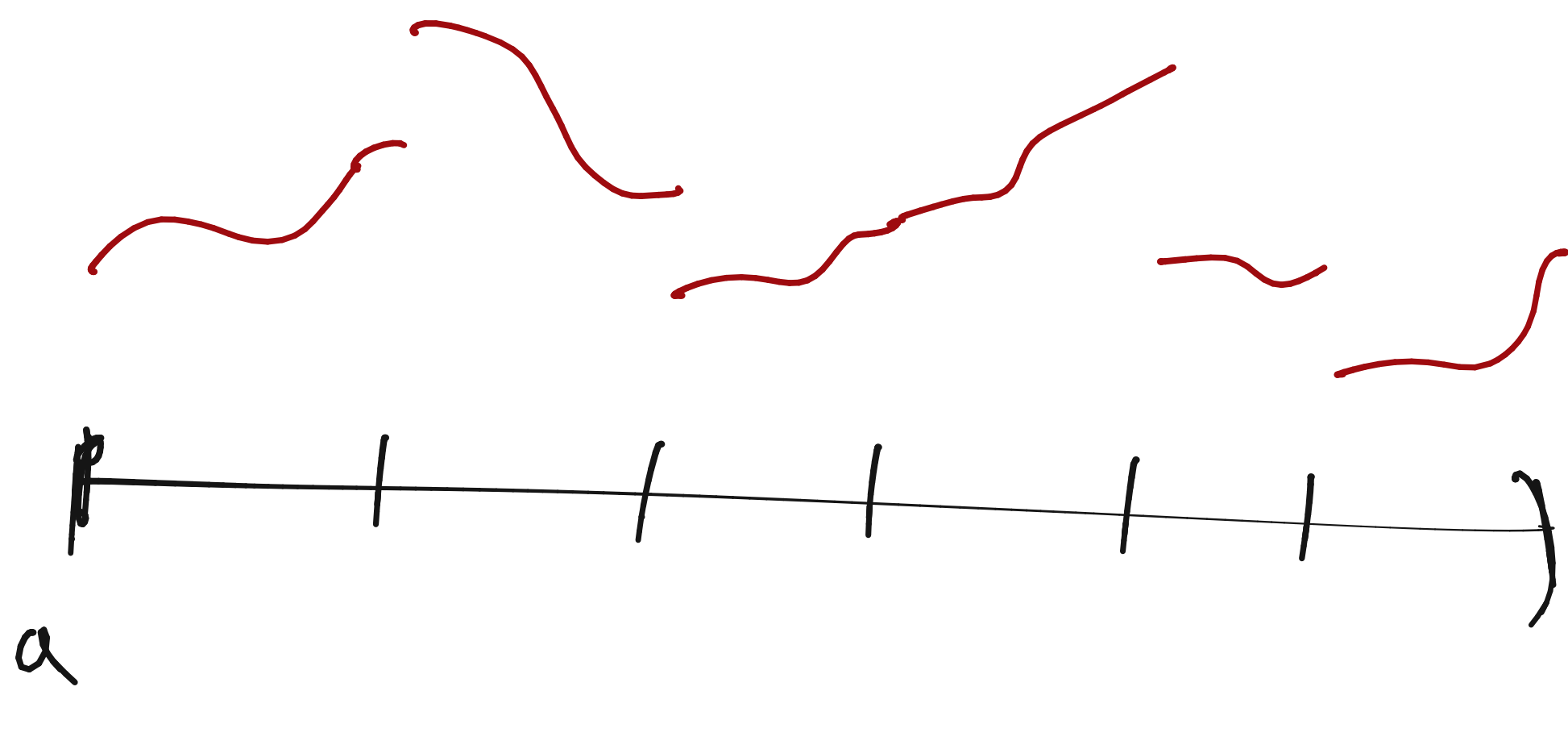
e

in fine

$f' : [t_{i-1}, t_i) \rightarrow \mathbb{R}$ i -esima continua

$f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

C^1 a tratti



t_i punti
i punti di discontinuità
di f

dove f può essere discontinua, ma in tal
caso le discontinuità i di tipo salto.

Def.: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice periodica se $\exists T > 0$

A.c. $f(x) = f(x+T) \forall x \in \mathbb{R}$. T si dice
periodo.

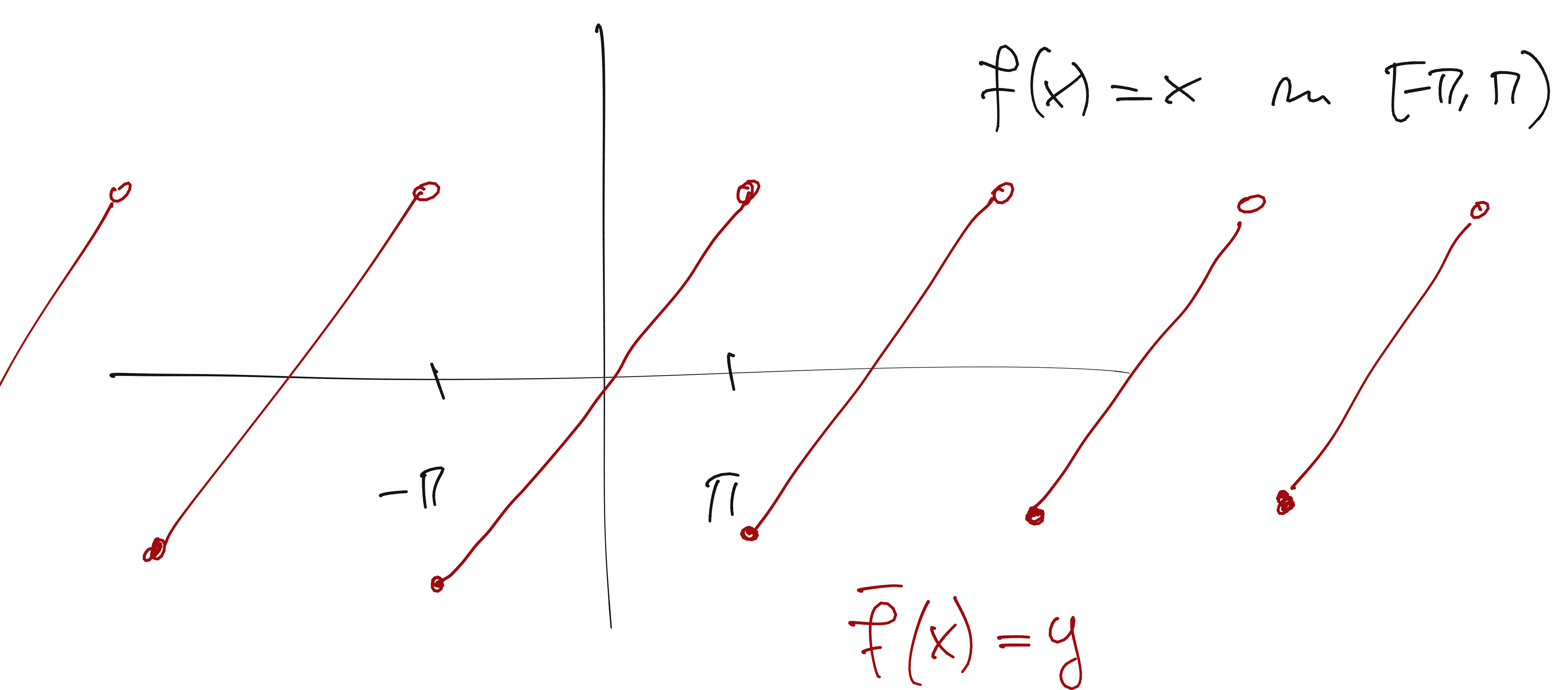
Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i periodica di periodo $T > 0$
possiamo definire $\tilde{f}(x) = f\left(\frac{xT}{2\pi}\right)$ e $\tilde{f}$ risultare
periodica di periodo 2π .

Se $f : [-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ possiamo definire la sua
estensione periodica di periodo 2π come

$$\tilde{f}(x) := f(x - 2k\pi)$$

$$\text{se } x \in [-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}$$



Lemma 1: la funzione $e_0 \equiv 1$ in $[-\pi, \pi)$

$e_k = \cos kx$ in $[-\pi, \pi)$

$e_{-k} = \sin kx$ in $[-\pi, \pi)$

$k \geq 1$

validi sono le seguenti proprietà:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e_k^2 dx = \pi$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad k \neq 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e_0^2 dx = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e_k \cdot e_j dx = 0 \quad k \neq j$$

esempi $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin kx dx = 0$ (verificare a caso)

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos kx)^2 dx = \pi$$

Inoltre

$$\int_{-\pi}^{\pi} e_k dx = \begin{cases} 2\pi & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \\ & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

