

SERIE DI FUNZIONI

Una serie di funzioni è una sommatoria

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \quad \text{dove } f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$$

Possiamo vedere la serie come limite delle somme parziali:

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i(x)$$

Def.: diremo che $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge puntualmente

ad $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ se $S_n(x) \rightarrow f(x)$ quando $n \rightarrow +\infty$ $\forall x \in E$.

Diremo che $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a $f(x)$ se $S_n \rightarrow f$ uniformemente quando $n \rightarrow +\infty$.

Diremo che $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge totalmente ad f

se $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_{\infty}$ è convergente ($\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_{\infty} < +\infty$)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

Oss.: Se $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge totalmente

(se $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_{\infty} < +\infty$) Allora $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$

converge uniformemente e quindi anche puntualmente ad $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \quad \forall x \in E$.

Infatti se $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_{\infty} < +\infty \Rightarrow$

la successione di somme parziali $S_n(x)$
converge uniformemente ad $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

Per mostrare ciò facciamo vedere che

$$\|S_n - \sum_{i=0}^{+\infty} f_i\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

$$\text{Ma adesso } S_n - \sum_{i=0}^{+\infty} f_i = - \sum_{i=n+1}^{+\infty} f_i$$

$$\|S_n - \sum_{i=0}^{+\infty} f_i\|_{\infty} = \left\| \sum_{i=n+1}^{+\infty} f_i \right\|_{\infty}$$

Ma $\forall x \in E$

$$\left| \sum_{i=n+1}^{+\infty} f_i(x) \right| \leq \sum_{i=n+1}^{+\infty} |f_i(x)| \leq \sum_{i=n+1}^{+\infty} \|f_i\|_{\infty}$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in E} \left| \sum_{i=n+1}^{+\infty} f_i(x) \right| \leq \sum_{i=n+1}^{+\infty} \|f_i\|_{\infty}$$

$$\Rightarrow \left\| \sum_{i=n+1}^{+\infty} f_i \right\|_{\infty} \leq \sum_{i=n+1}^{+\infty} \|f_i\|_{\infty}$$

quando $n \rightarrow +\infty$ ottengo $\left\| \sum_{i=n+1}^{+\infty} f_i \right\|_{\infty} \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \|S_n - \sum_{i=0}^{+\infty} f_i\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow S_n \rightarrow f = \sum_{i=0}^{+\infty} f_i$$

uniformemente.

di conseguenza abbiamo anche convergenza

$$\text{puntuale } \Leftrightarrow \forall x \in E \quad \sum_{i=0}^{+\infty} f_i(x) = f(x)$$

exemple : Prenons la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cos x}{n^2}$
 definie sur $\mathbb{R}$.

La serie converge totalement $\Leftrightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{\sin nx \cos x}{n^2} \right\|_{\infty, \mathbb{R}} < +\infty$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\sin nx \cos x}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{\sin nx \cos x}{n^2} \right\|_{\infty} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

$\Rightarrow$ esendoi convergence totale la fonction

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sin ix \cos x}{i^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin ix \cos x}{i^2}$$

Exercice $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log nx}{n^2}$

$$E = [1, +\infty)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n + \log x}{n^2}$$

$$E = [2, +\infty)$$

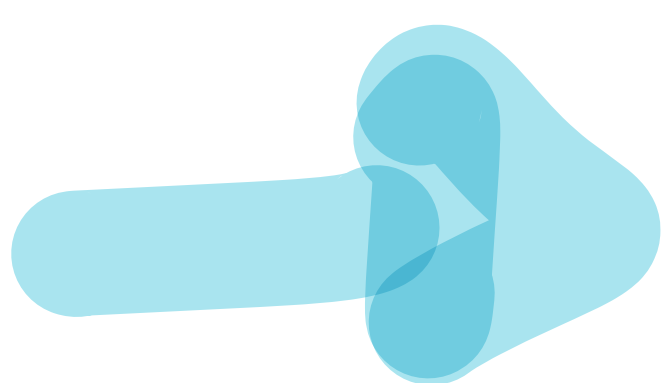
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n + \log x}{n^{3/2}}$$

"

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$$

$$E = \mathbb{R}, E = (0, +\infty)$$

pour quel $\alpha \in \mathbb{R}$
 c'est conv. total?



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n x}{n}$$

$$m \quad E = (\alpha, +\infty) \\ \alpha \in \mathbb{R}^+$$

Teorema 1 Siano $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$ integrabili e limitate dove E è un insieme misurabile secondo P-J. Supponiamo che $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converga totalmente. Allora $f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ è integrabile su E e

$$\int_E f(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_E f_n(x) dx$$

dim: $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_{\infty} < +\infty \Rightarrow S_n \rightarrow f$ uniform.

dove $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Sappiamo inoltre che

$S_n = \sum_{i=0}^n f_i$ è somma finita di funzioni limitate e integrabili su $E \Rightarrow S_n$ è integrabile e limitata

$$\Rightarrow \int_E S_n(x) dx = \int_E \sum_{i=0}^n f_i(x) dx = \sum_{i=0}^n \int_E f_i(x) dx$$

$\Rightarrow$ per un teorema visto le scorso volte

$$\begin{aligned} \int_E S_n(x) dx &\rightarrow \int_E f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \int_E f_i(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} \int_E f_i(x) dx \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^n \int_E f_i(x) dx \rightarrow \sum_{i=0}^{+\infty} \int_E f_i(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \left| \sum_{i=n+1}^{+\infty} \int_E f_i(x) dx \right| \rightarrow 0$$

$$\left| \sum_{i=n+1}^{+\infty} \int_E f_i(x) dx \right| \leq \sum_{i=n+1}^{+\infty} \left| \int_E f_i(x) dx \right|$$

$$\leq \sum_{i=n+1}^{+\infty} \int_E |f_i(x)| dx \leq \sum_{i=n+1}^{+\infty} \int_E \|f_i\|_{\infty} dx$$

$$= \sum_{i=n+1}^{+\infty} \|f_i\|_{\infty} m(E) = m(E) \sum_{i=n+1}^{+\infty} \|f_i\|_{\infty}$$

$$\rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty$$

Lemma 2 Supponiamo $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$f_n \in C^1([a, b])$ e supponiamo che $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$

$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$ converga uniformemente ad f e g .

rispettivamente Allora $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \in C^1([a, b])$

e $f' = g = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

dim.: $S_n(x) = \sum_{i=0}^n f_i(x)$ e di classe $C^1([a, b])$

e $S_n'(x) = \sum_{i=0}^n f_i'(x)$. $S_n \rightarrow f$ uniformemente
quando $n \rightarrow +\infty$

$S_n \rightarrow g$ uniformemente.

Applicando il teorema fatto per successioni di funz.
otteniamo subito che $f \in C^1([a, b])$ e
 $f' = g = \sum_{i=0}^{+\infty} f_i'$. □

Esercizio: Verificare se le ipotesi del teorema 1
sono necessarie oppure basta supporre che
 $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converga uniformemente

Introduciamo una particolare serie di funzioni
chiamate serie di potenze.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (y - y_0)^n \quad \text{dove } y_0 \in \mathbb{R} \text{ fisso}$$

e quindi $f_n(y) = a_n (y - y_0)^n$

Con il cambio di variabile $x = y - y_0 \Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \rightarrow f_n(x) = a_n x^n$$

dove $a_n \in \mathbb{R}$ qualsiasi. Nel caso precedente y_0
prende nome di centro della serie di potenze,
nel secondo caso stiamo considerando serie di
potenze con centro 0.

Oss.: Una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge sempre
per $x=0$

me può anche non convergere per nessun altro valore di $x \in \mathbb{R}$.

esempio $\sum_{n=1}^{+\infty} n^n x^n$ ($a_n = n^n$)

$x > 0$ criterio della radice $\Rightarrow \sqrt[n]{n^n x^n} = nx$

$nx \rightarrow +\infty$ quindi la serie non converge.

In altre parole se per assurdo $\sum_{n=1}^{+\infty} n^n x^n$ converge

$\Rightarrow n^n x^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$.

Ma $n^n x^n \not\rightarrow 0$ perché $|xn| \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow +\infty$ se $x \neq 0$.

Teorema 3 Supponiamo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge per

$x = y$. Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge $\forall x \in (-|y|, |y|)$

Dim. Per ipotesi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$ converge

$\Rightarrow |a_n y^n| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$.

quindi $|a_n y^n|$ è limitata $\exists M > 0$ t.c.

$|a_n y^n| \leq M \quad \forall n \geq 0$.

Allora possiamo prendere $x \in (-|y|, |y|)$ e studiare

la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n|$ e facciamo vedere

che converge. ($\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge)

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n| &= \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n y^n \frac{x^n}{y^n}| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n y^n| \left| \frac{x}{y} \right|^n \\
 &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} M \left| \frac{x}{y} \right|^n = M \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{x}{y} \right|^n \\
 &\text{dove } \left| \frac{x}{y} \right| < 1 \qquad = M \frac{1}{1 - \left| \frac{x}{y} \right|} < +\infty
 \end{aligned}$$

□

Oss.: Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$ non converge $\forall x$ tale che $|x| > |y| \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ non converge

Infatti se per assurdo trovo $\bar{x}$ con $|\bar{x}| > |y|$ per cui $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \bar{x}^n$ converge $\Rightarrow$ il teo precedente $\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge $\forall x \in (-|\bar{x}|, |\bar{x}|)$

quindi anche per $x = y$ ASSURDO.

Def.: Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ una serie di potenze

Allora definiamo il Raggio di Convergenza della serie il numero

$$R := \sup \left\{ |x| : x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ converge} \right\}$$

Se ad esempio $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow R = +\infty$$

Per l'osservazione precedente se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$ NON

converge, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ non converge $\forall x : |x| > |y|$

$$\Rightarrow R \leq |y|.$$

Viceversa per il teorema precedente
se $y \neq 0$ tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$ converge

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ converge } \forall x \in (-|y|, |y|)$$

$$\Rightarrow R \geq |y|$$

Ottengono quindi che R soddisfa le seguenti
proprietà:

Def: Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ha raggio di convergenza

$$R > 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ converge } \forall x : |x| < R$$

e non converge $\forall x$ t.c. $|x| > R$.

Oss.: Cosa succede se $|x| = R$?

esempio le tre serie $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$,

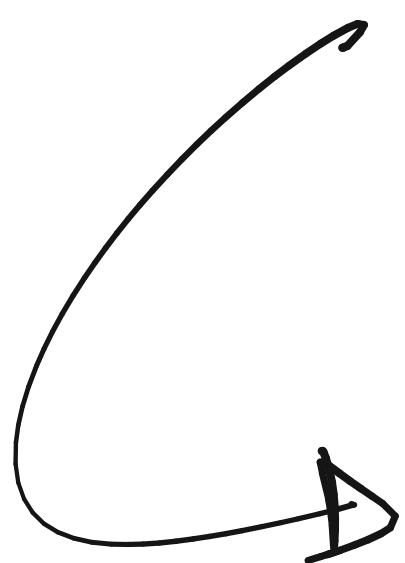
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)^2}$$

hence

tutte e tre rapp'io di

convergente per a $R=1$. (esatto)

quando $|x|=1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ non converge



$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{+\infty} 1^n = +\infty \quad x=1 \\ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \text{ non converge} \quad x=-1 \end{array} \right.$$

$$|x|=1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty \quad x=1 \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ converge} \quad x=-1 \end{array} \right.$$

$$|x|=1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)^2} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < +\infty \quad x=1 \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} < +\infty \quad x=-1 \end{array} \right.$$

$$\frac{\pi^2}{6}$$

esempio $\sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-nx}$

studiamo i valori di x per i quali la serie converge o non

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} n (e^{-x})^n$$

in punto $y = e^{-x}$

diventa $\sum_{n=0}^{+\infty} n y^n$ e una serie di potenze.

se $|y|=1$ non converge $\Rightarrow R \leq 1$

faciamo vedere che $\sum_{n=0}^{+\infty} n y^n$ converge per $|y| < 1 \Rightarrow R = 1$. se $y > 0$

$\sum_{n=0}^{+\infty} n y^n$ converge ad esempio

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n y^n} < 1$ che è vero

perché $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot y = y < 1$

$\Rightarrow R = 1 \Rightarrow \sum a_n y^n$ converge per ogni $|y| < 1$ e non converge $\forall y: |y| \geq 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} n(e^{-x})^n$ converge $\Leftrightarrow y = e^{-x} < 1$

$\Leftrightarrow x > 0$

Abbiamo visto che $\sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-x n}$ converge
puntualmente sul dominio $(0, +\infty)$.

Teorema Supponiamo che la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ abbia raggio di convergenza } R > 0$$

Allora la funzione $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ è derivabile

in $(-R, R)$ e la derivata coincide con la serie

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}. \text{ In particolare la}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ ha raggio di convergenza } R > 0.$$

dim.: Come prima cosa osserviamo che la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ ha raggio di convergenza } R > 0.$$

Infatti sia x tale che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge

($x \in (-R, R)$) allora si ha $\left| \frac{x}{R} \right| < 1$ e quindi

studiamo la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ e facciamo vedere

che converge. Applichiamo il criterio della radice

alle serie $\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$ (che converge $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ converge)

Supponiamo $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge $\forall x \in (-R, R)$

$\Rightarrow$ criterio della radice ci dice che $\Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} \leq 1 \quad \forall x \in (-R, R)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} |x| \leq 1 \quad \forall x \in (-R, R)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} R \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{R}$$

Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$ converge? per il criterio della radice

$$\sqrt[n]{|n a_n x^n|} = \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{|a_n|} |x|$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|} |x| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} |x| \\ &\leq \frac{1}{R} |x| = \left| \frac{x}{R} \right| < 1 \\ &\text{per } x \in (-R, R) \end{aligned}$$

Le serie converge per $x \in (-R, R)$.

Le serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(x)$ è derivabile in $(-R, R)$ e la sua derivata $f'(x)$ coincide con $\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

Un altro modo per vedere che la serie

$\sum n a_n x^{n-1}$ converge è il seguente:

prendiamo $r < R$ $r > 0$. e supponiamo che

la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge per $x=y$ $y \in (r, R)$

quindi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$ il termine generale della serie

è infinitesimo: $\exists M > 0$ t.c. $|a_n y^n| \leq M$
 $\forall n \in \mathbb{N}$

Facciamo vedere che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge

$\forall x \in [r, r)$. e che la convergenza è totale

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \|a_n x^n\|_{\infty, [r, r)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n r^n| \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| y^n \left| \frac{r}{y} \right|^n \quad \text{dove } y \in (r, R) \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} M \left| \frac{r}{y} \right|^n \end{aligned}$$

quest'ultima converge per il criterio della radice

perché $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M \left| \frac{r}{y} \right|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} M \left| \frac{r}{y} \right|$

$$= \left| \frac{r}{y} \right| < 1$$

Per il criterio del confronto converge $\sum_{n=0}^{+\infty} \|a_n x^n\|_{\infty, [r, r)}$

$\Rightarrow$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n-1}$ converge totalmente in $[r, r)$.

Come conseguenza c'è anche convergenza uniforme su $[r, r) \Rightarrow$ quindi anche puntuale in $[r, r)$ $\forall r < R$

$\Rightarrow$ convergenza puntuale in $(-R, R)$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$S_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

sappiamo che $S_n \rightarrow f$ uniformemente in $(-r, r)$ $\forall r < R$

$$S_n'(x) = \sum_{i=0}^n i a_i x^{i-1} \longrightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} i a_i x^{i-1} = g(x)$$

uniformemente in $(-r, r)$

un teorema fatto qualche anno fa ci assicura che f è derivabile e la sua derivata f' coincide con la $g(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} i a_i x^{i-1}$

$$\Rightarrow f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{in } (-r, r)$$

questo è vero per ogni $r < R \Rightarrow$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \forall x \in (-R, R) \quad \text{D}$$

Corollario: supponiamo $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

ha raggio di convergenza $R > 0$.

Per ogni $k > 0$ si ha che f è derivabile k -volte in $(-R, R)$ e tale derivata coincide

$$\text{con } \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{d^k}{dx^k} \right) a_n x^n = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$$

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

$$\frac{d}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = 2a_2 + 3a_3x + \dots$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\frac{d^k}{dx^k} = \dots = \sum_{n=k}^{+\infty} \underbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)} a_n x^{n-k}$$

$$\Rightarrow f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$$

Corollario 2 $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ha raggio di convergenza $R > 0$, allora f è di classe $C^\infty((-R, R))$.

Esercizio : nulla dimostrare precedente

abbiamo fatto vedere che il raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ è $\geq R$.

Provate a mostrare che in realtà è esattamente $R > 0$. (dove R è il raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$)

Abbiamo visto che $\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ converge

per ogni $x \in [-r, r]$ $\forall r \in (-R, R)$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^{n-1} \text{ converge } \forall x \in (-R, R)$$

$\bar{R}$ = raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^{n-1}$

$$\bar{R} = \sup \left\{ |x| : \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^{n-1} \text{ converge} \right\}$$

$$\geq R$$

Supp dell'esercizio 1 mostra che $\bar{R} \leq R$

Esercizio Calcolare il valore esatto della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k-1}}{(k-1)!}$$

FATTO 1 il raggio di convergenza è $R = +\infty$
(esercizio)

Osservazione: consideriamo la serie $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$

FATTO 2 il raggio di convergenza di questa serie è sempre $+\infty$.

$f(x) := \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$ ha come derivata

la funzione

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k-1}}{(k-1)!}$$

Calcoliamo $f(x)$. Chiamiamo $y = x^2$

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n!} = \frac{1}{2} (e^y - 1)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!} = e^y \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n!} = e^y - 1$$

$$f(x) = \frac{1}{2} (e^{x^2} - 1)$$

$$f'(x) = x e^{x^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k-1}}{(k-1)!}$$

$$\frac{d}{dx} \frac{x^{2k}}{k!} = \frac{2k x^{2k-1}}{k!} = \frac{2 x^{2k-1}}{(k-1)!}$$

Teorema: Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ una serie di

potenze per la quale esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} =: L \quad \text{Allora:}$$

- (i) Se $L = +\infty$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge solo per $x=0$
- (ii) Se $L = 0$ la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$ ($R = +\infty$)
- (iii) Se $L \in (0, +\infty) \Rightarrow R = \frac{1}{L}$. R = raggio di convergenza

dim.: Supponiamo $L \in (0, +\infty)$ Allora

consideriamo $x \in \mathbb{R}$ e applichiamo il criterio
della radice a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} |x| = L |x|$$

ottenge da $|x|L < 1 \left(\Leftrightarrow |x| < \frac{1}{L} \right)$

la serie converge e inoltre se

$|x|L > 1 \left(\Leftrightarrow |x| > \frac{1}{L} \right)$ la serie non converge

$$\Rightarrow R = \frac{1}{L}$$

Nel caso in cui $L = +\infty$. otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} |x| = L |x| = +\infty \quad \forall x \neq 0.$$

$\Rightarrow$ la serie non converge $\forall x \neq 0$.

Ultimo caso: $L = 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} |x| = L |x| = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$. $\square$

esempio: Calcolare valore esatto della

serie $\sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-nx}$

Ponendo $y = e^{-x}$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n y^n$$

il raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{+\infty} n y^n$

$$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1}$$

otteniamo che la serie converge per $|y| < 1$

$$\text{e } |y| = 1 \rightarrow \begin{cases} y = 1 \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n = +\infty \\ y = -1 \rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} n(-1)^n \text{ non esiste} \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-x n} \text{ converge e solo se } |e^{-x}| < 1$$

$$e^{-x} < 1 \text{ e vero se e solo se } x > 0.$$

Per calcolare il valore esatto di $\sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-x n}$

$$\begin{aligned} \text{Abbiamo } \sum_{n=0}^{+\infty} n y^n &= f(y) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n y^n = y \sum_{n=1}^{+\infty} n y^{n-1} \\ &= y \frac{d}{dy} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} y^n \right) \quad (*) \end{aligned}$$

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} y^n$ ha raggio di conv. $R=1$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} y^n = \frac{y}{1-y}$$

$$\textcircled{*} = y \frac{d}{dy} \left(\frac{y}{1-y} \right) = y \frac{(1-y) + y}{(1-y)^2}$$

$$= \frac{y}{(1-y)^2}$$

$$f(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} n y^n = \frac{y}{(1-y)^2}$$

SolTund $y=e^{-x}$
offeriow

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-nx} = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$$

per $x \in (0, +\infty)$