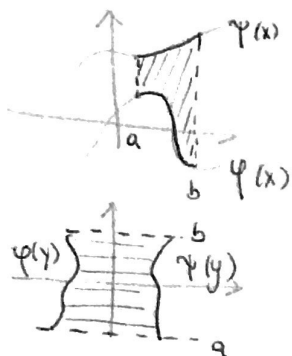


Esercitazione 2

Integrazione

Integrali doppi

Richiami teorici:



Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice

- normale rispetto all'asse x se si può scrivere nella forma

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \phi(x) \leq y \leq \psi(x) \}$$

per opportuni $a < b$ e $\phi: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$.

- normale rispetto all'asse y se si può scrivere come

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b, \phi(y) \leq x \leq \psi(y) \}$$

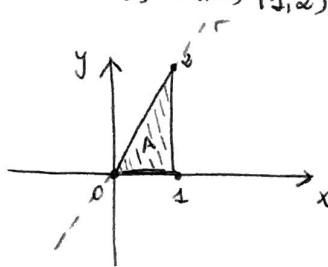
Formule di riduzione su insiemi normali

$$\text{Asse } x: \iint_A f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} dy f(x,y)$$

$$\text{Asse } y: \iint_A f(x,y) dx dy = \int_a^b dy \int_{\phi(y)}^{\psi(y)} dx f(x,y)$$

Esempio 0

$A =$ triangolo con vertici in $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$
 $f(x,y) = y$



Scrivo A come normale all'asse x :

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x \}$$

retta passante per $(0,0)$ e $(1,2)$

$$\iint_A y dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{2x} y dy = \int_0^1 dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{2x} = \int_0^1 dx \frac{4x^2}{2} = \left[\frac{2}{3} \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

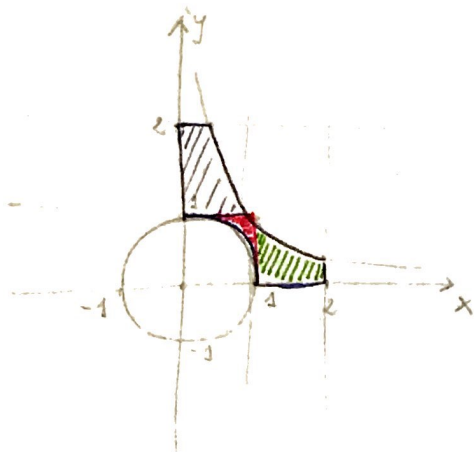
In alternativa, scrivo A normale risp all'asse y :

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2, \frac{y}{2} \leq x \leq 1 \}$$

$$\iint_A y dx dy = \int_0^2 dy \int_{y/2}^1 y dx = \int_0^2 dy \left[yx \right]_{y/2}^1 = \int_0^2 dy \left(y - \frac{y^2}{2} \right) = \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} \right]_0^2 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

Esercizio 1

Calcolare $\iint_A (x+y) dx dy$ dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } \begin{matrix} x^2 + y^2 \geq 1, \\ xy \leq 1, \\ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{matrix} \}$



Parte 1:



$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 1/y\}$
normale rispetto all'asse y

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{\text{green}} (x+y) dx dy = \int_1^2 dy \int_0^{1/y} dx (x+y) = \int_1^2 dy \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_0^{1/y} = \int_1^2 \left(\frac{1}{2y^2} + 1 \right) dy \\ &= \left[-\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{y} \right) + y \right]_1^2 = -\frac{1}{4} + 2 - \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Parte 2:



$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{1-x^2} \leq y \leq 1\}$ normale rispetto a x

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{\text{red}} (x+y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 dy (x+y) = \int_0^1 dx \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{\sqrt{1-x^2}}^1 \\ &= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} - \left(x\sqrt{1-x^2} + \frac{1-x^2}{2} \right) \right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (1-x^2)^{3/2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Parte 3:



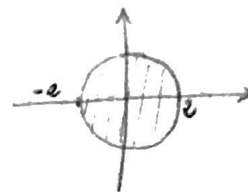
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1/x\}$ normale rispetto a x

$$\begin{aligned} I_3 &= \iint_{\text{blue}} (x+y) dx dy = \int_1^2 dx \int_0^{1/x} dy (x+y) = \int_1^2 dx \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{1/x} = \int_1^2 \left(1 + \frac{1}{2x^2} \right) dx = \dots = \frac{5}{4} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{come } I_1 \end{aligned}$$

Quindi $\iint_A (x+y) dx dy = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{5}{4} + \frac{1}{3} + \frac{5}{4} = \frac{17}{6}$

Esercizio 2

$\iint_A (x^2 + y^2) dx dy$ dove A = cerchio con centro $(0,0)$ e raggio 2



1° modo

Vedere A come insieme normale rispetto a uno dei due assi

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, -\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2} \}$$

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy (x^2 + y^2) = \int_{-2}^2 dx \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} = \dots \text{ integrate prendi radici!}$$

2° modo

uso le coordinate polari

Cambiamento di variabili negli integrali doppi

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_B \underbrace{g(u,v)}_{f(x,y) \text{ nelle nuove variabili}} \cdot \underbrace{|\det J|}_{\substack{A \text{ descritto nelle nuove variabili } u \text{ e } v}} du dv$$

Polari: formule di cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases} \quad \rho \in [0, r], \quad \vartheta \in [0, 2\pi]$$

$$|\det J| = \rho$$

Descrivo A in coord. polari

$$\iint_A (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^2 \underbrace{d\rho}_{\substack{B: \text{descrizione di } A \text{ in coord. polari}}} \int_0^{2\pi} \underbrace{\rho^2}_{\substack{f(x,y) \text{ in coord. polari}}} \cdot \underbrace{\rho}_{|\det J|} d\vartheta =$$

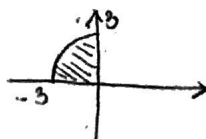
$$\left(\begin{array}{c} x^2 + y^2 \\ \downarrow \\ \rho^2 \cos^2 \vartheta + \rho^2 \sin^2 \vartheta = \rho^2 (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) = \rho^2 \cdot 1 = \rho^2 \end{array} \right)$$

$$= \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} \rho^3 d\vartheta = \int_0^2 d\rho [\rho^3 \vartheta]_0^{2\pi} = \int_0^2 2\pi \rho^3 d\rho = 2\pi \int_0^2 \rho^3 d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^2 = 2\pi \cdot 4 = 8\pi$$

Esercizio 3

$$\iint_A x dx dy$$

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 \leq 9) \cap (\text{II Quadrante}) \}$$



In polari $0 \leq \rho \leq 3$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$

$$\begin{aligned} \iint_A y^2 dx dy &= \int_0^3 \rho d\rho \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \cdot \rho \cos \theta \cdot \rho = \int_0^3 \rho^2 d\rho \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \theta d\theta = \\ &= \int_0^3 \rho^2 d\rho [\sin \theta]_{\pi/2}^{\pi} = - \int_0^3 \rho^2 d\rho = - \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^3 = -9 \end{aligned}$$

Integrali Tripli

- Integrale per colonne (o fili)

Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice normale rispetto al piano xy se è della forma

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

La formula di integrazione diventa

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Esercizio 4

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2, 0 \leq z \leq 3\} = \text{cilindro}$$

$$f(x, y, z) = z$$

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$$

$$\begin{aligned} \iiint_A z dx dy dz &= \iint_{\Omega} dx dy \int_0^3 z dz = \iint_{\Omega} dx dy \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^3 = \iint_{\Omega} \frac{9}{2} dx dy = \frac{9}{2} \iint_{\Omega} dx dy = \\ &= \frac{9}{2} \cdot \text{Area}(\Omega) = \frac{9}{2} \cdot 2\pi = 9\pi \end{aligned}$$

- Integrale per sezioni

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dz \int_{S_z} f(x, y, z) dx dy$$

dove

$[a, b]$ è l'insieme in cui varia z in A

S_z è la sezione di A ad altezza z , cioè

$$S_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in A\}$$



Tornando all'es. 4 e risolvendo per sezioni:

$$\begin{aligned} \iiint_A z dx dy dz &= \int_0^3 dz \iint_{S_z} dx dy \cdot z = \int_0^3 z dz \iint_{S_z} dx dy = \int_0^3 z dz \underbrace{\text{Area}(S_z)}_{\text{circhio di raggio } \sqrt{2}} = \int_0^3 z dz \cdot \pi \cdot 2 = \\ &= 2\pi \int_0^3 z dz = \pi [z^2]_0^3 = 9\pi \end{aligned}$$

Esercizio 5

Calcolare $\iiint_V x^2 y z \, dx dy dz$ dove $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 1\}$

Notiamo che il dominio di integrazione è una sfera di raggio 2 di cui prendo solo la parte a quota maggiore di 1

Integriamo per sezioni

$$\iiint_V x^2 y z \, dx dy dz = \int_1^2 dz \iint_{S_z} x^2 y z \, dx dy$$

dove S_z è la sezione di V a quota z , cioè un cerchio (raggio r)

$$S_z = B((0,0,z), r)$$

Teorema di Pitagora

$$r = \sqrt{2^2 - z^2} = \sqrt{4 - z^2}$$

$$S_z = B((0,0,z), \sqrt{4 - z^2})$$

$$= \int_1^2 dz \iint_{B((0,0,z), \sqrt{4 - z^2})} x^2 y z \, dx dy$$

$$= \int_1^2 z \, dz \iint_{B((0,0,z), \sqrt{4 - z^2})} x^2 y \, dx dy$$

calcolo questo integrale utilizzando le coord. polari

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\sqrt{4 - z^2}} d\rho \int_0^{2\pi} \rho^2 \cos^2 \vartheta \, \rho \sin \vartheta \, d\vartheta \\ &= \int_0^{\sqrt{4 - z^2}} d\rho \int_0^{2\pi} \rho^4 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta = \\ &= \left(\int_0^{\sqrt{4 - z^2}} \rho^4 \, d\rho \right) \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta}_{\downarrow} \end{aligned}$$

$$\cos^2 \vartheta = 1 - \sin^2 \vartheta$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \vartheta - \sin^3 \vartheta \, d\vartheta = 0$$

Non è necessario procedere dato che l'integrale vale zero.

Osservazioni: • È possibile svolgere l'integrale su S_2 anche restando in coord. cartesiane

$$\iint_{S_2} x^2 y \, dx \, dy = \int_{-\sqrt{4-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} x^2 \int_{-\sqrt{4-z^2-x^2}}^{\sqrt{4-z^2-x^2}} y \, dy \, dz = \dots = 0$$

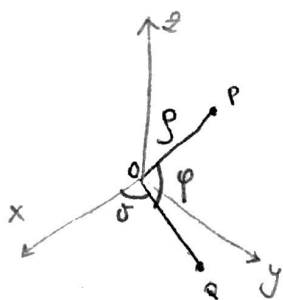
• Avremmo potuto integrare anche per fili (o colonne)

$$\iint_{B_1} x^2 y \, dx \, dy \int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \, dz = \dots$$

dove B_1 è la sezione che si ottiene a quota $z=1$

Coord. sferiche:

→ ρ = lunghezza di OP
 → φ = angolo tra OP e OQ
 (angolo tra OP e il piano xy)
 $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$



→ θ = angolo tra OQ e semiasse $x > 0$
 $\theta \in [0, 2\pi]$

Formule di passaggio:

$$\begin{cases} z = \rho \sin \varphi \\ x = \rho \cos \varphi \cos \theta \\ y = \rho \cos \varphi \sin \theta \end{cases}$$

$$\text{Det } J = \rho^2 \cos \varphi$$

Esercizio 6

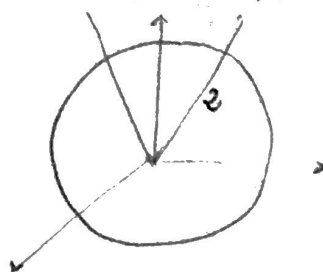
$$\iiint_V dx \, dy \, dz \quad \text{dove } V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq \frac{z^2}{3}, z \geq 0\}$$

Studio d'intersezione tra i due solidi:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = \frac{z^2}{3} \end{cases} \rightarrow \frac{z^2}{3} = 4 - z^2$$

$$\frac{4}{3} z^2 = 4$$

$$z = \pm \sqrt{3}$$



In coordinate sferiche

$$z = \rho \sin \varphi$$

$$\sqrt{3} = 2 \sin \varphi$$

$$\sin \varphi_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varphi_{\min} = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi_{\max} = \frac{\pi}{2}$$

$$\iiint_V 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^2 \rho \, d\rho \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\pi} d\vartheta \, \rho^2 \cos \varphi$$

$$= \int_0^2 \rho^2 \, d\rho \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos \varphi \, d\varphi \int_0^{2\pi} d\vartheta =$$

$$= \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^2 \left[\sin \varphi \right]_{\pi/3}^{\pi/2} \left[\vartheta \right]_0^{2\pi} = \frac{8}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot 2\pi$$