

Esercitazione 3

Successioni e serie di funzioni. Serie di potenze

Richiami teorici:

Sia S un insieme
 $(f_n) \rightarrow f$ puntualmente in S se
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in S$

$(f_n) \rightarrow f$ uniformemente in S se
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in S} |f_n(x) - f(x)| = 0$

Conv. uniforme $\rightarrow$ conv. puntuale
 $\leftarrow$

Esercizio 1

studiare la convergenza della successione di funzioni $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dove
 $f_n: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ è definita ponendo $f_n(x) := \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.

Per ogni $x \in [-1, 1]$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \sqrt{x^2} = |x|,$$

Quindi la successione converge puntualmente alla funzione $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = |x|$.
Per studiare la convergenza uniforme osserviamo che, per ogni intero $n \geq 1$ ed ogni punto
 $x \in [-1, 1]$ si ha

$$|f_n(x) - f(x)| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x|$$

"razionalizzo" $\rightarrow$

$$= \frac{1/n}{\sqrt{x^2 + 1/n} + |x|}$$

Essendo poi

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x| \geq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \geq \sqrt{\frac{1}{n}},$$

Si ottiene

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{n} \cdot \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Si conclude che

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-1, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$$

per cui la convergenza è anche uniforme.

□

Esercizio 2 Sia $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f_n(x) = x^n(1-x^n) \quad \forall n \geq 1$.

- Determinare l'insieme di convergenza puntuale I e la funzione limite della successione (f_n)
- Studiare la convergenza uniforme di (f_n) su I e sugli intervalli $[0, b]$ con $0 < b < 1$

a) Lo studio è limitato all'intervallo $[0, 1]$.

Consideriamo gli estremi: $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 0$.

Prendiamo $x \in (0, 1)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n (1 - x^n) = 0 \cdot 1 = 0$$

Quindi, $\forall x \in [0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ $I = [0, 1]$.

b) La convergenza di $f_n \rightarrow f$ è uniforme su un intervallo D se

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Nel nostro caso

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0, 1]} f_n(x).$$

Dallo studio di funzione di $f_n(x)$ si ha:

$$f_n'(x) = nx^{n-1}(1-x^n) + x^n(-nx^{n-1}) = nx^{n-1}(1-2x^n)$$

- Il punto di massimo si ha in $\bar{x} = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$
- La funzione è crescente in $[0, \bar{x}]$ e decrescente in $(\bar{x}, 1]$
- $f_n(\bar{x}) = 1/4$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{4} \neq 0 \rightarrow \text{non si ha conv. uniforme su } I$$

Cosa accade se mi limito a un intervallo $[a, b]$ con $0 < b < 1$?

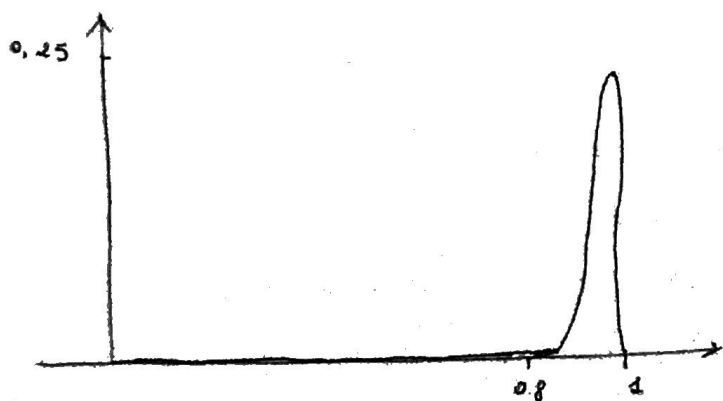
Fissiamo b .

Se prendiamo n sufficientemente grande, il punto di massimo cadrà fuori dall'intervallo $[a, b]$ e in tale intervallo la funzione sarà crescente, per cui:

$$\sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| = f_n(b).$$

Tuttavia, $b \in I$, quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(b) = 0$.

Concludiamo che la convergenza è uniforme in $[a, b]$.



Teoria: S insieme, $f_n: S \rightarrow \mathbb{R}$ succ. di funzioni
una serie di funzioni si presenta come

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \quad \forall x \in S.$$

Fissato $x \in S$, diventa una serie di numeri.

Costruisco le somme parziali

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x) \quad \forall x \in S \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

e dico che la serie conv. puntuale / uniforme a $S_\infty(x)$ se

$$S_n(x) \rightarrow S_\infty(x)$$

puntuale / unif.

$$\left(\text{Conv. unif significa} \right. \\ \left. \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in S} \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in S} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| = 0 \right)$$

Definisco conv. totale quando

$\exists M_k$ numerica
non negativa
convergente

tale che $\|f_k\|_S \leq M_k$.

conv totale $\Rightarrow$ conv unif $\Rightarrow$ conv puntuale

Esercizio 3

Studiare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^2 \cos(n x^2)}{n^3 + 1}$

a) Conv. puntuale in $\mathbb{R}$?

Visto che la serie non è a termini positivi passiamo alla conv. assoluta

$$\left| \frac{n x^2 \cos(n x^2)}{n^3 + 1} \right| \leq \frac{x^2}{n^2 + \frac{1}{n}} \leq \frac{x^2}{n^2}$$

ma $x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Quindi la serie conv. assolutamente in $\mathbb{R} \Rightarrow$ conv. puntualmente in $\mathbb{R}$

b) conv. totale in $\mathbb{R}$?

f_n è il prodotto tra una funz. illimitata $\frac{n}{n^3+1} x^2$ e una funzione oscillante $\cos(n x^2)$

$$\Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = +\infty$$

$\Rightarrow$ non posso trovare una successione numerica M_n che limiti f_n

$\Rightarrow$ non ho conv. totale in $\mathbb{R}$.

c) Studio conv. uniforme in $\mathbb{R}$.

Si può dimostrare che la condizione di convergenza uniforme, cioè

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in S} \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) - \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right| = 0$$

implica $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in S} |f_n(x)| = 0$

Visto che questo non è vero per la serie data in $\mathbb{R}$, non abbiamo conv. uniforme in tale insieme.

Convergenza su intervalli contenuti in $\mathbb{R}$?

Provo la conv. totale su $[x_1, x_2] \subset \mathbb{R}$, $C = \max(|x_1|, |x_2|)$

$$\left| \frac{n x^2 \cos(n x^2)}{n^3 + 1} \right| \leq \frac{n C^2}{n^3 + 1} < \frac{n C^2}{n^3} = \frac{C^2}{n^2}$$

La serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Quindi ho conv. totale, dunque uniforme, su ogni intervallo in $\mathbb{R}$.

Esercizio 4 Studiare $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2 + 1} e^{nx}$ su $S = (-\infty, +\infty)$. □

Condizione necessaria per la convergenza puntuale: infinitesimalità del termine n-esimo della serie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \underbrace{\left(\frac{n^2}{n^2 + 1} \right)}_{\rightarrow 1} e^{nx} \stackrel{?}{=} 0 \quad \text{solo se } x < 0$$

⇒ Riduco S a $S = (-\infty, 0)$.

Provo a vedere se è verificata la conv. totale

$$\|f_n\|_S = \sup_{x < 0} \left| (-1)^n \frac{n^2}{n^2 + 1} e^{nx} \right| = \frac{n^2}{n^2 + 1}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_S$ non converge (il termine n-esimo tende a 1)

quindi $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ non converge totalmente su $(-\infty, 0)$.

Studio allora in interi $S = (-\infty, a)$ con $a < 0$

$$\|f_n\|_S = \frac{n^2}{n^2 + 1} e^{na} \quad (\text{la } f_n \text{ è monotona crescente in } x)$$

$$e^{na} = (e^a)^n = b^n \quad \text{con } 0 < b < 1 \text{ perché } a < 0.$$

$\sum_{n=0}^{\infty} b^n$ converge perché serie geometrica.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} b^n$ converge per il criterio del confronto ($\frac{n^2}{n^2 + 1} < 1$)

quindi $M_n = \frac{n^2}{n^2 + 1} e^{an} = \|f_n\|_S$ è il termine n-esimo di una serie numerica convergente, non-negativa e tale che $\|f_n\|_S \leq M_n$.

- $\Rightarrow$ ho conv. totale su tutti gli insiemi contenuti in $(-\infty, a]$ con $a < 0$
 $\Rightarrow$ ho uniforme sugli stessi insiemi
 $\Rightarrow$ conv. puntuale $\forall x < 0$.

Esercizio 5

Studiare $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x+n^2}{x^2+3n^4}$

Proviamo con la conv. totale

Studio f_n :

$$f_n'(x) = \frac{x^2 + 3n^4 - (x+n^2)(2x)}{(x^2+3n^4)^2} = \dots = \frac{-x^2 - 2xn^2 + 3n^4}{(x^2+3n^4)^2}$$

$$f_n'(x) = 0:$$

$$-x^2 - 2xn^2 + 3n^4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2n^2 \pm \sqrt{4n^4 + 12n^4}}{-2} = \frac{2n^2 \pm 4n^2}{-2} = \begin{cases} -3n^2 \\ n^2 \end{cases}$$

$$\|f_n\|_{\infty} = \max \{ |f_n(-3n^2)|, |f_n(n^2)|, |\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x)|, |\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)| \}$$

$$= \max \left\{ \frac{1}{8n^2}, \frac{1}{2n^2}, 0, 0 \right\} = \frac{1}{2n^2}$$

Essendo $\frac{1}{n^2}$ una serie geometrica convergente, abbiamo convergenza totale in $\mathbb{R}$ per la serie data.

Teoria:

Serie di potenze

è del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

(*)

x_0 centro.

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

raggio di convergenza

Teo Cauchy-Hadamard:

- (*) converge puntualmente in (x_0-R, x_0+R)
- (*) uniforme in $[x_0-p, x_0+p]$, $p < R$
- (*) non converge $\forall x \notin [x_0-R, x_0+R]$

Esercizio 6

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x \left(\sin \frac{x}{n} \right)^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\sin \frac{x}{n} \right)^n$$

$$|\sin t| < |t|$$

$$\frac{|\sin t|}{|t|} < 1$$

Studio conv. assoluta uniforme

$$|x| \sum_{n=1}^{\infty} n \left| \sin \frac{x}{n} \right|^n =$$

$$= |x| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \left| \sin \frac{x}{n} \right|^n}{\left| \frac{x}{n} \right|^n} \cdot \frac{|x|^n}{|n|^n} \leq |x| \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n |x|^n}{n^n}}_{\substack{\text{serie di potenze} \\ \text{nella variabile } y=|x| \\ \text{centrata in zero con } a_n = \frac{n}{n^n}}}$$

Calcolo il raggio di convergenza

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n} \rightarrow 0$$

$$\text{infatti } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

⇒ Raggio di convergenza infinita:

Cauchy - Hadamard : - conv puntuale $|x| < \infty$
 - conv uniforme per ogni compatto in $(-\infty, +\infty)$

Tramite il criterio del confronto so che questi risultati valgono anche per $|x| \sum_{n=1}^{\infty} n \left| \sin \frac{x}{n} \right|^n$
 e poiché la conv. assoluta implica quella normale valgono anche per $x \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\sin \frac{x}{n} \right)^n$

□