

Appendice Teorica dell'Esercitazione 6

Teorema (Weierstrass generalizzato)

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo che

(i) f è continua.

(ii) esiste un sottoinsieme non vuoto e compatto, cioè esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che
 $K_M = \{x \in D: f(x) \leq M\}$ ← sottoinsieme
è non vuoto e compatto.

Allora

$\min \{f(x): x \in D\}$ esiste per forza.

Oss Se voglio che esista il max, basta usare il sopralivello.

dim

Per Weierstrass classico esiste

$$\min \{f(x): x \in K_M\}.$$

Sia x_0 un p.to di minimo in K_M . Dico che x_0 è p.to di min. per tutto D . Infatti:

- se $x \in K_M$, allora $f(x) \geq f(x_0)$ [per def. di x_0]
- se $x \in D \setminus K_M$, allora

$$\begin{array}{ccc} f(x) > M & \geq & f(x_0) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{per def} & & \text{perché } x_0 \in K_M \\ \text{di } K_M & & \end{array}$$

Quindi in ogni caso $f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in D$.

Corollario

Supponiamo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuo e $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
Allora esiste il minimo.

dim

Basta dim. che esiste un sottoinsieme non vuoto e compatto.

Scelgo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a caso (ad esempio $x_0 = 0$) e pongo

$$M = f(x_0).$$

Il corrispondente sottoinsieme è

- $\neq \emptyset$, perché contiene x_0
- chiuso perché immagine di un chiuso $(-\infty, M]$
- limitato perché per definizione di limite

$$\exists R > 0 \text{ t.c. } f(x) \geq M+1 \quad \forall x \text{ t.c. } |x| \geq R$$

quindi

$$K_M \subseteq B_R(0).$$

Concludiamo $K_M \neq \emptyset$ e compatto.

Esempio

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2$$

$$D = \mathbb{R}^2$$

$$\lim_{|x,y| \rightarrow \infty} f(x,y) = \lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} x^2+y^2 = \infty$$

Siamo nelle hp del corollario $\Rightarrow$ minimo esiste.

(si vede a occhio che è in $(0,0)$)