

Esercizio 6

Massimi e minimi - caso vincolato.

Per il bordo $\begin{cases} \text{si può procedere sia con il modo parametrico,} \\ \text{sia utilizzando i moltiplicatori di Lagrange.} \end{cases}$

Esercizio 1 (tratto da esame Novembre 2015)

Individuare, se esistono, i punti di massimo e minimo assoluto della funzione $f(x,y) = 2x^2 + xy + 2y^2$, soggetto ai vincoli $x > 0$, $x^2 - 2xy = 1$.

(1) Metodo parametrico

Da $x^2 - 2xy = 1$ si ha $-2xy = 1 - x^2 \Rightarrow y = \frac{-1+x^2}{-2x}$

Quindi la parametrizzazione del vincolo è data da

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t^2-1}{2t} \end{cases}, \quad t > 0.$$

Componendo ora $f(x,y)$ con la parametrizzazione ci riconduciamo alla ricerca del max/min assoluto della funzione

$$\begin{aligned} h(t) &= f\left(t, \frac{t^2-1}{2t}\right) = 2t^2 + t \cdot \frac{t^2-1}{2t} + 2\left(\frac{t^2-1}{2t}\right)^2 = \\ &= 2t^2 + \frac{t^2-1}{2} + \frac{2}{4t^2} (t^4 + 1 - 2t^2) = \\ &= 2t^2 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2} + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{t^2} - 1 = \\ &= 3t^2 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2t^2}. \end{aligned}$$

$$h'(t) = 6t + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{t^3}\right) = 6t - \frac{1}{t^3} = \frac{6t^4 - 1}{t^3}.$$

Studio il segno di h'

$$h'(t) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{6t^4-1}{t^3} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} \uparrow \\ t > 0 \end{matrix} 6t^4 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 6t^4 \geq 1 \Leftrightarrow t \leq -\sqrt[4]{\frac{1}{6}} \cup t \geq \sqrt[4]{\frac{1}{6}}$$

Poiché $t > 0$, resta solo $t \geq \frac{1}{\sqrt[4]{6}}$, quindi $t = \frac{1}{\sqrt[4]{6}}$ è un punto di min. assoluto

$$\Rightarrow y = \frac{t^2-1}{2t} = \frac{1}{2\sqrt[4]{6}} - \frac{\sqrt[4]{6}}{2} = \frac{1-\sqrt{6}}{2\sqrt[4]{6}}$$

Pertanto $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}, \frac{1-\sqrt{6}}{2\sqrt[4]{6}}\right)$ è un punto di minimo.

(2) Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Sia $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2xy = 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2 - 2xy - 1}_{g(x,y)} = 0\}$

Calcoliamo i gradienti di f e di g :

$$\nabla f(x,y) = (4x+y, 4y+x)$$

$$\nabla g(x,y) = (2x-2y, -2x)$$

e costruiamo il sistema

$$\begin{cases} g = 0 \\ \nabla f = \lambda \nabla g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g = 0 \\ f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y) \\ f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2xy - 1 = 0 & a \\ 4x + y = 2\lambda(x - y) & b \\ 4y + x = -2\lambda x & c \end{cases}$$

Dalla c) si ottiene $4y = -2\lambda x - x \Rightarrow y = -\frac{2\lambda+1}{4}x$.

Sostituendo in b)

$$4x - \frac{2\lambda+1}{4}x = 2\lambda\left(x + \frac{2\lambda+1}{4}x\right)$$

$\Uparrow$

$$\frac{16x - 2\lambda x - x - 8\lambda x - 4\lambda^2 x - 2\lambda x}{4} = 0$$

$\Uparrow$

$$15x - 12\lambda x - 4\lambda^2 x = 0$$

$\Uparrow$

$$x(15 - 12\lambda - 4\lambda^2) = 0$$

- $\lambda = 0$: soluzione non accettabile perché deve valere il vincolo $x > 0$
- $4\lambda^2 + 12\lambda - 15 = 0$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{6}$$

$$\lambda_2 \Rightarrow \text{in c)} \quad y = -\frac{2\left(-\frac{3}{2} - \sqrt{6}\right) + 1}{4}x = \frac{1 + \sqrt{6}}{2}x \Rightarrow$$

$$\text{in a)} \quad x^2 - 2x \cdot \frac{1 + \sqrt{6}}{2}x - 1 = 0$$

$\Uparrow$

$$x^2 - (1 + \sqrt{6})x^2 - 1 = 0$$

$\Uparrow$

$$-\sqrt{6}x^2 = 1 \quad \text{impossibile,}$$

$$\lambda_1 \Rightarrow \text{in c)} \quad y = -\frac{2\left(-\frac{3}{2} + \sqrt{6}\right) + 1}{4}x = \frac{1 - \sqrt{6}}{2}x \Rightarrow$$

$$\text{in a)} \quad x^2 - (1 - \sqrt{6})x^2 - 1 = 0$$

$\Uparrow$

$$\sqrt{6}x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{6}}$$

$x = -\frac{1}{\sqrt[4]{6}}$ non accettabile perché deve valere $x > 0$;

$$x = \frac{1}{\sqrt[4]{6}} \Rightarrow y = \frac{1-\sqrt{6}}{2} \quad x = \frac{1-\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{6}} = \frac{1-\sqrt{6}}{2\sqrt[4]{6}}$$

Quindi il p.to che soddisfa il minimo è $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}, \frac{1-\sqrt{6}}{2\sqrt[4]{6}}\right)$ ed è un p.to di minimo.

Segue da: [Corollario di Weierstrass generalizzato]

Supponiamo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua e $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. (*)

Allora esiste il minimo.

La nostra funzione è continua, limitata inferiormente (≥ 0), quindi aumentando dell'origine va a $+\infty$.

Esercizio 2 (tratto da esame 19 Gennaio 2016)

$f(x, y, z) = xy + z^2$ soggetta ai vincoli

$$z \geq 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$x + y + z = 0$$

Procediamo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. (caso con più moltiplicatori).

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}.$$

Dalla Teoria sappiamo che i p.ti di min e max vanno cercati tra i punti nazionali della lagrangiana

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = xy + z^2 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) - \mu(x + y + z)$$

Scriviamo il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 & \Leftrightarrow y - 2\lambda x - \mu = 0 & (1) \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 & \Leftrightarrow x - 2\lambda y - \mu = 0 & (2) \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 & \Leftrightarrow 2z - 2\lambda z - \mu = 0 & (3) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 & \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (4) \\ \frac{\partial L}{\partial \mu} = 0 & \Leftrightarrow x + y + z = 0 & (5) \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro la (4) e la (2) otteniamo

$$\begin{aligned} y - x &= 2\lambda x - 2\lambda y \\ (1 - 2\lambda)y &= (1 - 2\lambda)x \\ y &= x & (i). \end{aligned}$$

Sostituendo (i) nella (5): $2x + z = 0 \Rightarrow z = -2x$ (ii)

Sostituendo (i) e (ii) nella (4): $x^2 + x^2 + 4x^2 = 1 \Rightarrow 6x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{6}/6$

• $x = \sqrt{6}/6 \Rightarrow z < 0 \Rightarrow$ non accettabile

• $x = -\sqrt{6}/6 \Rightarrow y = x = -\sqrt{6}/6, z = -\sqrt{6}/6 (-2) = \sqrt{6}/3$

Otteniamo il punto $(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3})$.

Si tratta di un p.to di minimo. Segue da (*).

Esercizio 3 (tratto da esame 4 aprile 2018)

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ soggetta ai vincoli

$$x + y - z = 1$$

$$x + y + z = 0$$

(1) Metodo parametrico

Studiamo l'intersezione tra i vincoli:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$
$$\hline 1 \quad 1 \quad -2z = 1$$

$\Rightarrow z = -\frac{1}{2}$. Sostituendo z nella prima equazione, si ha

$$x + y - z = 1 \Rightarrow y = z - x + 1 = \frac{1}{2} - x.$$

L'insieme ammissibile può essere espresso come

$$G = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x,y,z)^T = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2} - x \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

e quindi $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$t \mapsto (t, \frac{1}{2} - t, -\frac{1}{2})$, $t \in (-\infty, +\infty)$ è una rappresentazione parametrica del vincolo.

$$f(t, \frac{1}{2} - t, -\frac{1}{2}) = t^2 + (\frac{1}{2} - t)^2 + \frac{1}{4} = 2t^2 - t + \frac{1}{4}$$

parabola rivolta verso l'alto (simmetrica nel minimo)

Derivando e uguagliando a zero si ottiene:

$$4t - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2} - t = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ è un p.to di minimo assoluto.

(2) Metodo moltiplicatori di Lagrange

$$L(x,y,z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(x + y - z - 1) - \mu(x + y + z).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 & \Leftrightarrow 2x - \lambda - \mu = 0 & (1) \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 & 2y - \lambda - \mu = 0 & (2) \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 & 2z + \lambda - \mu = 0 & (3) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 & x + y - z = 1 & (4) \\ \frac{\partial L}{\partial \mu} = 0 & x + y + z = 0 & (5) \end{cases}$$

Sappiamo che $z = -1/2$. Sostituendo in (3) si ha $\lambda - \mu = 1$
 $\lambda = 1 + \mu$. (i)

Sostituendo λ nella (5) otteniamo $x + y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - y$ (ii)

Sostituendo (i) e (ii) nella (4) si ha $1 - 2y - 1 - 2\mu = 0$
 $2y = -2\mu \Rightarrow y = -\mu$ (iii)

" (i) e (iii) nella (2) si ha $-2\mu - 1 - 2\mu = 0 \Rightarrow -4\mu = 1$
 $\mu = -1/4$.

" il valore di μ nella (i) si trova $\lambda = 1 + \mu = 1 - 1/4 = 3/4$.

Quindi $y = -\mu = 1/4$.

Sostituendo i valori di λ e μ nella (4), si ha $2x - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 0$
 $x = 1/4$.

Quindi otteniamo il punto $(1/4, 1/4, -1/2)$, che è lo stesso p.to di minimo trovato con il metodo parametrico.

Chi ci garantisce che il minimo ci sia veramente?

Intuitivamente: la funzione è una distanza nello spazio, il vincolo è una retta, pertanto il minimo ci deve essere.

Formalmente: la funzione è continua, limitata inferiormente (≥ 0), quindi allontanandosi dall'origine va a $+\infty$.
 $\Rightarrow (*)$.

Esercizio 4

Determinare il valore massimo/minimo di f in

$$D = \{(x, y) : 4x^2 + y^2 \leq 4, 2x^2 + y \geq 2\}$$

$$f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 2x^2y - 4.$$

↑
 Contiene anche punti interni, quindi bisognerà studiare anche gli eventuali max/min all'interno dell'insieme.

$$\nabla f(x, y) = (8x + 4xy, 2y + 2x^2)$$

Punti stazionari:

$$\begin{cases} 8x + 4xy = 0 \\ 2y + 2x^2 = 0 \end{cases} \rightarrow 4x(2 + y) = 0$$

$$\begin{matrix} \downarrow \\ x = 0 \end{matrix} \rightarrow y = -2$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2y + 0 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = -2 \\ -4 + 2x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 2 \end{cases}$$

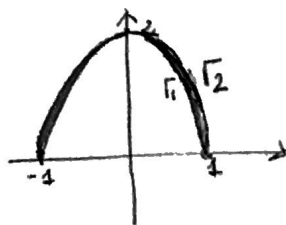
$$(0, 0) \quad (\sqrt{2}, -2), (-\sqrt{2}, -2)$$

Nessuno dei punti stazionari determinati è interno a D .

D insieme compatto, f continua $\Rightarrow f$ assume il valore massimo e il valore minimo sul bordo $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$:

$$\Gamma_1 = \{(x, y) : 2x^2 + y = 2 \text{ e } x \in [-1, 1]\}$$

$$\Gamma_2 = \{(x, y) : 4x^2 + y^2 = 4 \text{ e } x \in [-1, 1]\}$$



1) Posto $y = 2 - 2x^2$ si ha che

$$f(x, 2 - 2x^2) = 4x^2 + 4(1 - x^2)^2 + 4x^2(1 - x^2) - 4 =$$

$$= 4x^2 + 4 - 8x^2 + 4x^4 + 4x^2 - 4x^4 - 4 = 0 \quad \text{costante}$$

$$f(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in \Gamma_1$$

2) Moltiplicatori di Lagrange. Sia $g(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4 = 0$.

$$\nabla g(x, y) = (8x, 2y)$$

$$\nabla f(x, y) = (8x + 4xy, 2y + 2x^2)$$

$$\begin{cases} 8x + 4xy = 8\lambda x \\ 2y + 2x^2 = 2\lambda y \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x(2 + y - 2\lambda) = 0 \\ x = 0 \rightarrow 2\lambda = 2 + y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \dots \\ 0 + y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2 \end{cases}$$

$y = -2$ non ammissibile

$(0, 2) \leftarrow$ già in Γ_1

$$\cup \begin{cases} 2\lambda = 2 + y \\ 2y + 2x^2 = (2 + y)y = 2y + y^2 \rightarrow y^2 = 2x^2 \\ 4x^2 + y^2 = 4 \rightarrow 4x^2 + 2x^2 = 4 \rightarrow x^2 = \frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} \pm \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$f\left(\pm \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{8}{3\sqrt{3}}$$

Confrontando i valori trovati si ha che il valore massimo di f in D è $\frac{8}{3\sqrt{3}}$ e quello minimo è 0.

Esercizio 5

$$f(x, y) = (y - x)e$$

$$\text{Max/min in } D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}.$$

$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e D compatto $\rightarrow$ Weierstrass.

Punti stazionari interni a D :

$$\nabla f(x, y) = (2x - 2y, 2y - 2x) = (0, 0)$$

da cui $x = y$. Quindi i p.ti stazionari interni a D sono

Dato che $f \geq 0$ in $\mathbb{R}^2$ tali punti sono di minimo assoluto.

Bordo di D : $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$

$$1) \Gamma_1 = \{(0, y) : y \in [1, 2]\} \quad f(0, y) = y^2 \quad \text{con } f(0, 1) = 1 \text{ e } f(0, 2) = 4$$

$$\Gamma_3 = \{(0, y) : y \in [-2, -1]\} \quad f(0, y) = y^2 \quad \text{con } f(0, -2) = 4 \text{ e } f(0, -1) = 1$$

$$2) \Gamma_2 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4, x > 0\},$$

$$\Gamma_4 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x > 0\}$$

$$\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$$

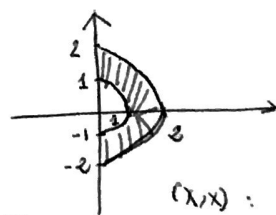
Punti stazionari vincolati

$$\begin{cases} 2x - 2y = \lambda 2x \\ 2y - 2x = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{cases}$$

$r = 1, 2$

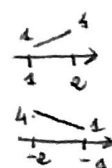
$$\rightarrow \begin{cases} x = \pm y \\ 2x^2 = r^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} (\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}) \\ (\frac{r}{\sqrt{2}}, -\frac{r}{\sqrt{2}}) \end{matrix} \quad (x > 0)$$



$\uparrow$ contiene anche p.ti interni.

$$(x, x) : x \in (\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}) \text{ e } f(x, x) = 0.$$



Per $r = 1, 2$ si ha che $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 = f\left(\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2, \quad f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 8$$

Confrontando i valori ottenuti si ha che:

$(x, x) : x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right]$ sono i punti di minimo assoluto con valore 0 e $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ è un punto di massimo con valore 8.