

# Esercitazione 7

## Equazioni differenziali

### Esercizio 1

Individuare la soluzione generale della seguente eq. diff. lineare del 2° ordine a coeff. costanti non omogenea:

$$y''(x) + 4y(x) = xe^x.$$

(1) Troviamo una soluzione dell'eq. omogenea ad essa associata

$$y''(x) + 4y(x) = 0.$$

Troviamo le soluzioni del polinomio caratteristico  $P(\lambda)$  associato all'equazione

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = -4 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-4} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i.$$

Soluzioni  
complesse  
conjugate.

$\Rightarrow$  Soluzione dell'eq. diff. omogenea è data da:

$$y_0(x) = a \cos(2x) + b \sin(2x)$$

Ricorda: Nel caso di radici complesse coniugate  $\alpha \pm i\beta$ , una base dello spazio delle soluzioni è

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t), e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

Quindi la soluzione generale è

$$u(t) = a e^{\alpha t} \cos(\beta t) + b e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

(2) Cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea del tipo

$$\bar{y}(x) = a(x) \cos(2x) + b(x) \sin(2x)$$

e per farlo ricorriamo al metodo di somiglianza con  $g(x) = Q(x)e^{\lambda x} = xe^x$ ,  $\lambda = 1 \neq \lambda_{1,2}$ . Quindi la soluzione particolare è della forma

$$\bar{y}(x) = e^x (B + Ax) = Be^x + Axe^x \quad (*)$$

Calcoliamo

$$\bar{y}'(x) = Be^x + Ae^x + Axe^x = Ae^x + (Ax + B)e^x$$

$$\bar{y}''(x) = Ae^x + Ae^x + (Ax + B)e^x = (Ax + 3A + B)e^x.$$

Sostituendo nell'eq. di partenza, otteniamo

$$(Ax + 2A + B)e^x + 4(Ax + B)e^x = xe^x$$

$$(5Ax + 2A + 5B)e^x = xe^x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5A = 1 \\ 2A + 5B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/5 \\ B = -2/25 \end{cases}$$

$$\text{Quindi si ha } \bar{y}(x) = e^x \left( -\frac{2}{25} + \frac{1}{5}x \right) = \frac{1}{25} e^x (5x - 2)$$

(3) Soluzione generale:  $y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = a \cos(2x) + b \sin(2x) + \frac{1}{25} e^x (5x - 2)$

(\*) Ricorda:  $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(t)$ .

•  $f(t) = p_m(t) e^{bt}$ , con  $p_m$  polinomio di grado  $m \geq 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$

Se  $\lambda = b$  non è radice dell'eq. caratteristica, allora si cerca una sol. particolare della forma

$$y_p(t) = (A_0 + A_1t + \dots + A_mt^m) e^{bt}.$$

Se  $\lambda = b$  è radice con molteplicità  $r$  dell'eq. caratteristica, allora

$$y_p(t) = t^r (A_0 + A_1t + \dots + A_mt^m) e^{bt}.$$

### Esercizio 2 (10 Settembre 2020)

Studiare, al variare del parametro reale  $\alpha$ , il seguente problema:

$$\begin{cases} \alpha x''(t) - 2x'(t) + x(t) = e^t + \sin(t) \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$$

Studiamo subito il caso particolare  $\alpha = 0$ . In tal caso  $-2x'(t) + x(t) = e^t + \sin(t)$ , quindi  $-2x'(0) + x(0) = e^0 + \sin(0) = 1$ . È quindi impossibile che  $x(0) = x'(0) = 0$ . Il problema non ha soluzioni.

Studiamo ora  $\alpha \neq 0$ . Prima si studia l'eq. omogenea associata.

Il polinomio caratteristico è  $\alpha \lambda^2 - 2\lambda + 1$ .

Si distinguono tre casi:

1)  $\alpha < 1$ : 2 soluzioni reali e distinte,  
↓  
una base è  $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}$   $\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{1-\alpha}}{\alpha}, \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{1-\alpha}}{\alpha}$

⇒ soluz. generale è  $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

2)  $\alpha = 1$ : 2 soluzioni reali e coincidenti  
↓  
una base è  $e^{\lambda t}, t e^{\lambda t}$   $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

⇒ soluz. generale è  $x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$

3)  $\alpha > 1$ . Soluzioni complesse coniugate.  $\tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{\sqrt{\alpha-1}}{\alpha} i, \tilde{\lambda}_2 = \frac{1}{\alpha} - \frac{\sqrt{\alpha-1}}{\alpha} i$

⇒ Soluz. generale è  $x(t) = c_1 e^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)t} \cos\left(\frac{\sqrt{\alpha-1}}{\alpha} t\right) + c_2 e^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)t} \sin\left(\frac{\sqrt{\alpha-1}}{\alpha} t\right)$

### Soluzioni particolare per $\alpha \neq 1$

Cerchiamo soluzione particolare di  $\alpha x''(t) - 2x'(t) + x(t) = e^t$ .

$\lambda_1, \lambda_0, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2 \neq 1$

Quindi la soluzione particolare è della forma

$$\bar{x}(t) = e^t B$$

$$\bar{x}'(t) = B e^t$$

$$\bar{x}''(t) = B e^t$$

Sostituendo nell'eq. di partenza

$$\alpha B e^t - 2 B e^t + B e^t = e^t$$

$$(\alpha B - B) e^t = e^t$$

$$\alpha B - B = 1$$

$$B(\alpha - 1) = 1$$

$$\rightarrow B = \frac{1}{\alpha - 1}$$

Quindi  $\bar{x}_1(t) = \frac{1}{\alpha - 1} e^t$

Chiediamo ora soluz. particolare di  $\alpha x''(t) - 2x'(t) + x(t) = \sin(t)$

Metodo di somiglianza:

•  $f(t) = p_m(t) e^{bt} \sin(ct)$  con  $p_m$  polinomio di grado  $m \geq 0$ ,  $b, c \in \mathbb{R}$ .  
Se  $\lambda = b + ic$  non è radice dell'equazione caratteristica, allora

$$y_p(t) = (A_0 + A_1 t + \dots + A_m t^m) e^{bt} \sin(ct) + (B_0 + B_1 t + \dots + B_m t^m) e^{bt} \cos(ct)$$

Se  $\lambda = b + ic$  è radice con molteplicità  $r$  dell'eq. caratteristica, allora

$$y_p(t) = t^r (A_0 + A_1 t + \dots + A_m t^m) e^{bt} \sin(ct) + t^r (B_0 + B_1 t + \dots + B_m t^m) e^{bt} \cos(ct)$$

Nel nostro caso  $p_m(t) = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$

La soluzione particolare è della forma

$$\bar{x}_2(t) = A \sin(t) + B \cos(t)$$

$$\bar{x}_2' = A \cos(t) - B \sin(t)$$

$$\bar{x}_2'' = -A \sin(t) + B \cos(t)$$

Sostituendo nell'eq. di partenza

$$-A \sin(t) + B \cos(t) - 2A \cos(t) + 2B \sin(t) + A \sin(t) + B \cos(t) = \sin(t)$$

$$(-A + 2B + A) \sin(t) + (B - 2A + B) \cos(t) = \sin(t)$$

$$\begin{cases} -A + 2B + A = 1 \\ B - 2A + B = 0 \end{cases} \rightarrow A = \frac{1 - \alpha}{\alpha^2 - 2\alpha + 5}, \quad B = \frac{2}{\alpha^2 - 2\alpha + 5}$$

Per linearità risulta  $\bar{x}(t) = \frac{1}{\alpha - 1} e^t + \frac{1 - \alpha}{\alpha^2 - 2\alpha + 5} \sin(t) + \frac{2}{\alpha^2 - 2\alpha + 5} \cos(t)$

è la soluzione particolare del problema iniziale

### Soluzione particolare per $\alpha = 1$

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = e^t$$

$\lambda = b = 1$  con molteplicità 2

Quindi la soluzione particolare è della forma

$$\bar{x}(t) = t^2 A e^t$$

$$\bar{x}'(t) = A(t^2 + 2t) e^t$$

$$\bar{x}''(t) = A(t^2 + 4t + 2) e^t$$

Sostituendo nell'eq. di partenza

$$A(t^2 + 4t + 2) e^t - 2A(t^2 + 2t) e^t + A t^2 e^t = e^t$$

$$A t^2 - 2A t^2 + A t^2 = 0$$

$$4A t - 4A t = 0$$

$$2A = 1 \rightarrow A = 1/2$$

$$\text{Quindi } \bar{x}(t) = \frac{1}{2} t^2 e^t.$$

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = \sin(t) \dots$$

Per linearità  $\bar{x}(t) = \frac{1}{2} t^2 e^t + A \sin(t) + B \cos(t)$  è quindi soluzione particolare del problema di partenza.

### Conclusioni

Quello che rimane è l'imporre le condizioni iniziali. Si tratta ora di individuare, univocamente, costanti reali  $c_1$  e  $c_2$  tali che

$$(\text{caso } \alpha < 1) \quad c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{1}{\alpha-1} e^t + \frac{1-\alpha}{\alpha^2-2\alpha+5} \sin(t) + \frac{2}{\alpha^2-2\alpha+5} \cos(t); \text{ oppure}$$

$$(\text{caso } \alpha = 1) \quad c_1 e^t + c_2 t e^t + \frac{1}{2} t^2 e^t + \frac{a}{2} \sin(t) + \frac{b}{2} \cos(t); \text{ oppure}$$

$$(\text{caso } \alpha > 1) \quad c_1 e^{(t/\alpha)} \cos\left(\frac{\sqrt{\alpha-1}}{\alpha} t\right) + c_2 e^{(t/\alpha)} \sin\left(\frac{\sqrt{\alpha-1}}{\alpha} t\right) + \frac{1}{\alpha-1} e^t + \frac{1-\alpha}{\alpha^2-2\alpha+5} \sin(t) + \frac{2}{\alpha^2-2\alpha+5} \cos(t)$$

Valgono o insieme alla propria derivata prima in  $t = 0$ .

Nel primo caso si tratta di risolvere

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{1}{\alpha-1} + \frac{2}{\alpha^2-2\alpha+5} = 0 \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \frac{1}{\alpha-1} + \frac{1-\alpha}{\alpha^2-2\alpha+5} = 0, \end{cases}$$

nel secondo

$$\begin{cases} c_1 + \frac{2}{x^2 - 2x + 5} = 0 \\ c_1 + c_3 + a = 0 \end{cases}$$

e infine nel terzo

$$\begin{cases} c_1 + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2 - 2x + 5} = 0 \\ \frac{\sqrt{x-1}}{x} c_3 + \frac{1}{x} c_1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1-x}{x^2 - 2x + 5} = 0 \end{cases}$$

### Esercizio 3

Risolvere il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' = \frac{1}{y} (y')^2 - y^2 \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Usiamo la sostituzione  $y'(x) = z(y(x))$  e  $y'' = z'z$ . Allora dobbiamo risolvere il P. di Cauchy

$$\begin{cases} z'z = \frac{1}{y} z^2 - y^2 \\ z(-1) = 1, \end{cases} \quad \leftarrow \begin{aligned} &z(y(x)) = y'(x) \\ &z(y(0)) = y'(0) \\ &z(-1) = 1 \end{aligned}$$

Poiché  $\frac{0}{0}$  non è soluzione, possiamo dividere per  $z$  e otteniamo

$$\begin{cases} z' = \frac{1}{y} z - \frac{y^2}{z} \\ z(-1) = 1 \end{cases} \quad \text{eq. di Bernoulli con } \alpha = -1$$

Utilizziamo la sostituzione  $w = z^2$ , da cui  $w' = 2z z'$ . Allora dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} 2z z' = \frac{1}{y} z^2 - y^2 \quad (\text{ha moltiplicato per } z) \\ z(-1) = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} w' = \frac{1}{y} w - y^2 \\ w(-1) = 1 \end{cases}$$

Questa è un'equazione lineare del 1° ordine non omogenea a coeff. variabili.

$$\begin{aligned} u' + a(t)u &= b(t) \\ \text{Dato } A(t) \text{ una qualunque primitiva di } a(t) \\ u(t) &= c e^{-A(t)} + e^{-A(t)} \int e^{A(s)} b(s) ds \end{aligned}$$

$$w' - \left(\frac{2}{y}\right)w = (-2y^3)$$

$$w(y) = ce^{-A(y)} + e^{-A(y)} \int e^{A(s)} b(s) ds$$

$$A(y) = \int -\frac{2}{y} dy = -\int \frac{2}{y} dy = -2 \ln|y|$$

$$e^{-A(y)} = e^{2 \ln|y|} = e^{\ln|y|^2} = y^2$$

$$\int e^{-2 \ln|y|} \cdot (-2y^3) = -2 \int \frac{1}{y^2} \cdot y^3 = -2 \int 1 dy = -2y$$

$$w(y) = cy^2 + y^2(-2y) = cy^2 - 2y^3$$

Imponendo la condizione iniziale  $\begin{cases} w(y) = cy^2 - 2y^3 \\ w(-1) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1 = c + 2 \\ c = -1 \end{cases}$

e dunque  $w(y) = -y^2 - 2y^3$ .

Ricordandoci di  $w = z^2$  troviamo  $z = \pm \sqrt{-y^2 - 2y^3}$ .  
 $z(-1) = 1$

Ora dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} y' = \sqrt{-y^2 - 2y^3} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Separando le variabili

$$\int \frac{1}{\sqrt{-y^2 - 2y^3}} dy = \int dx,$$

da cui

$$\int \frac{1}{-y \sqrt{-1-2y}} dy = x + k$$

Per calcolare l'integrale usiamo la sostituzione  $-1-2y = u^2$  da cui  $-2 dy = 2u du$  e

dunque  $y = -\frac{u^2+1}{2}$

$$\int \frac{1}{\frac{u^2+1}{2} \sqrt{-1-2\left(\frac{u^2+1}{2}\right)}} \cdot u du = \int \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{u^2+1}{2} u} du = \int \frac{-2}{u^2+1} du = -2 \arctan(u)$$

$$-2 \arctan(u) = x + k$$

Ritornando alla variabile y

$$-2 \arctan(\sqrt{-1-2y}) = x + k$$

$$\arctan(\sqrt{-1-2y}) = \frac{x+k}{-2}$$

$$-1-2y = \tan^2\left(\frac{x+k}{-2}\right) \rightarrow 2y = -1 - \tan^2\left(\frac{x+k}{-2}\right)$$

$$y = -\frac{1}{2} \left(1 + \tan^2\left(-\frac{x}{2} - \frac{k}{2}\right)\right)$$

Imponendo la condizione  $y(0) = -1$  otteniamo  $k = -\pi/2$ ,  $\Rightarrow$  La soluzione è

$$y(x) = -\frac{1}{2} \left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right)$$