

Esercitazione 1

Massimi e minimi - caso non vincolato

Basi teoriche:

Teorema

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^2(A)$.
Supponiamo che $\bar{x} \in A$ è un punto stazionario ($\nabla f(\bar{x}) = 0$)
e che $\nabla^2 f(\bar{x})$ sia definita positiva. Allora $\bar{x}$ è un p.to di minimo relativo stretto.

Se $\bar{x}$ è p.to stazionario e $\nabla^2 f(\bar{x})$ è definita negativa, allora $\bar{x}$ è un p.to di massimo relativo stretto.

Caratterizzazione delle matrici 2x2

Sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ simmetrica.

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \quad \text{Risulta:}$$

- $\det A > 0 \Rightarrow A$ è definita
- $\det A = 0 \Rightarrow A$ è semidefinita
- $\det A < 0 \Rightarrow A$ è indefinita

In particolare, se $\det A > 0$,

A è def. positiva se $a_{11} > 0$,
def. negativa se $a_{11} < 0$.

Esercizio 1

Determinare i punti di massimo e minimo locale della seguente funzione di due variabili:

$$f(x,y) = \frac{x}{1+x^2+y^2}$$

Svilgimento:

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R}^2$$

f è di classe C^2 su $\text{dom}(f)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1+y^2-x^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

Quindi

$$\nabla f(x,y) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+y^2-x^2=0 \\ xy=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x,y) = (\pm 1, 0)$$

PUNTI STAZIONARI

Per capire la natura di questi pti stazionari, scriviamo la matrice Hessiana di f in questi punti.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -2x \frac{3+y^2-x^2}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2y \frac{2x(1+x^2+y^2)-2(1+y^2-x^2)^2}{(1+x^2+y^2)^4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2x \frac{1+x^2-3y^2}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2x \frac{1+x^2-3y^2}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2y \frac{1-3x^2+y^2}{(1+x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = \frac{2y(1-3x^2+y^2) - (1-3x^2+y^2)^2}{(1+x^2+y^2)^4} = \frac{-2(1-3+0)}{2^4} = \frac{-2(-2)}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

Quindi

$$\nabla^2 f(1,0) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(-1,0) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\det > 0$$

$$a_{11} < 0$$

Quindi l' Hessiana è definita
negativa

$\Downarrow$

$(1,0)$ è un punto di massimo
locale

$$\det > 0$$

$$a_{11} > 0$$

Quindi Hess. def. positiva

$\Downarrow$

$(-1,0)$ è un p.to di minimo
locale per f .

Esercizio 2

Studiare i punti di massimo e minimo locale di

$$f(x,y) = |xy|(7x+7y-1)$$

restritta agli insiemi

$$A^+ = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$$

$$A^- = (0, +\infty) \times (-\infty, 0)$$

Svolgimento:

Consideriamo innanzitutto la restrizione di f ad A^+ ; si ha

$$f(x,y) = xy(7x+7y-1) = 7x^2y + 7xy^2 - xy \quad \forall (x,y) \in A^+$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 14xy + 7y^2 - y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 7x^2 + 14xy - x$$

Quindi

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 14xy + 7y^2 - y = 0 \\ 7x^2 + 14xy - x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(14x + 7y - 1) = 0 \\ x(7x + 14y - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 & \vee & 14x+7y-1=0 \\ x=0 & \vee & 7x+14y-1=0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x=0 \\ 14x+7y-1=0 \end{cases}$$

$$\vee \quad \begin{cases} y=0 \\ 7x+14y-1=0 \end{cases}$$

$$\vee \quad \begin{cases} 14x+7y-1=0 \\ 7x+14y-1=0 \end{cases}$$

Quindi f ha 4 p.ti stazionari

$$O = (0,0)$$

$$P_1 = (0, 1/7)$$

$$P_2 = (1/7, 0)$$

$$P_3 = \left(\frac{1}{21}, \frac{1}{21}\right)$$

I primi tre punti non appartengono a A^+ . Rimane dunque P_3 e lo classifichiamo usando la matrice hessiana di f

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 14y & 14x + 14y - 1 \\ 14x + 14y - 1 & 14x \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f\left(\frac{1}{21}, \frac{1}{21}\right) = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\det > 0$$

$$\text{ass} > 0$$

Quindi l'hessiana è definita positiva $\Rightarrow \left(\frac{1}{21}, \frac{1}{21}\right)$ è un punto di minimo locale per f su A^+

Consideriamo adesso la restrizione di f ad A^- . Osserviamo che

$$f(x,y) = -xy(7x+7y-1) \quad \forall (x,y) \in A^-$$

Quindi f restrita ad A^- ha gradiente $-(14xy+7y^2-y, 7x^2+14xy-x)$ e dunque ha gli stessi punti stazionari di A^+ .

O, P_1, P_2, P_3 non appartengono ad A^- . quindi deduciamo che f non ha punti stazionari in A^- .

Esercizio 3

Svolgimento:

$$f(x,y) = 3x^2 - xy^2$$

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R}^2$$

f è di classe C^2 su $\text{dom}(f)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x - y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2xy$$

Quindi

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - y^2 = 0 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0).$$

Scriviamo la matrice hessiana di f in questo p. nto. si ha che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2y.$$

Quindi

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

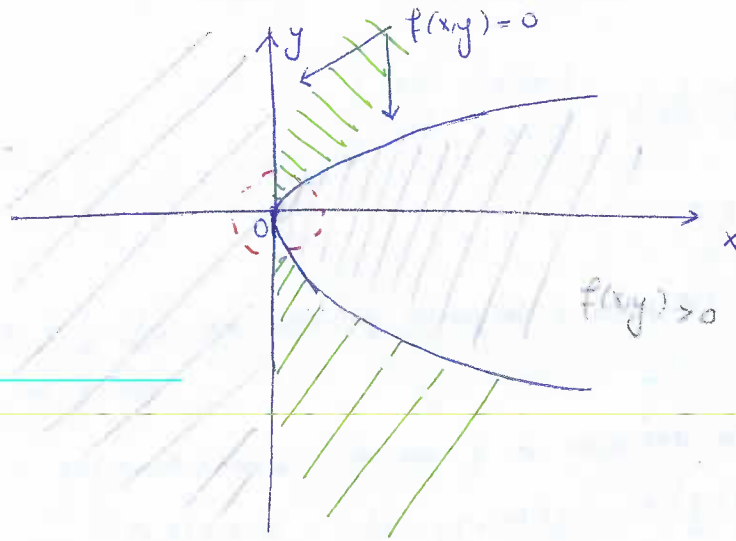
$$\det = 0!$$

Quindi in questo caso il Teorema non ci dice nulla. La matrice hessiana in $(0,0)$ è semidefinita e $\Rightarrow$ non si possono trarre conclusioni. ALTRI MEZZI. $(0,0)$ non sarà un p.to di massimo locale per f , potrebbe essere di minimo?

Per stabilirlo facciamo uno studio locale di f in un intorno di $(0,0)$.

Per definizione $(0,0)$ è un p.to di minimo locale per f se esiste $r > 0$ tale che
 $\forall (x,y) \in B_r(0,0) : f(x,y) \geq f(0,0) = 0$.

$f(x,y) = 3x^2 - xy^2 = x(3x - y^2)$. Si ha che $f(x,y) = 0$ se $x = 0$ oppure $x = \frac{1}{3}y^2$.
 Rappresentiamo il segno di f su $\mathbb{R}^2$



//// $f(x,y) > 0$
 //// $f(x,y) < 0$

In qualunque intorno di $(0,0)$ ci sono sia punti (x,y) in cui $f(x,y) < 0$ sia punti (x,y) in cui $f(x,y) > 0$.

Quindi $(0,0)$ non è p.to di minimo per f . È una sella.

Funzioni a 3 variabili.

Base teorica: Teorema Una matrice simmetrica $A = (a_{ij})$ è definita [negativa] positiva se tutti i suoi autovalori sono [negativi] positivi.

Esercizio 4

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + (z^2 + 1)^2 + 12$$

Svolgimento:

$$\text{dom}(f) = \mathbb{R}^3$$

f di classe C^2 su $\text{dom}(f)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 4z(z^2 + 1)$$

$$\nabla f(x,y,z) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z(z^2+1)=0 \end{cases}$$

I punti stazionari sono $(0,0,0)$ e $(0,0,\pm 1)$

Matrice Hessiana :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 12z^2 - 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$$

Quindi

$$\nabla^2 f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

autovalori di segno discorde.

$\Rightarrow$ indefinita

Quindi $(0,0,0)$ né max né

min.

Senza

$$\nabla^2 f(0,0,\pm 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$\lambda_i > 0 \quad \forall i$

$\Rightarrow$ def. positiva

$\Rightarrow (0,0,\pm 1)$ punti di minimo locale per f .