

Primo appello Settembre, 09/09/24

Esercizio 1: Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\log(1+|x|y^2)}{\sqrt{x^2+2y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dire se e dove f è continua, derivabile e differenziabile.

Soluzione: La funzione è continua per $(x, y) \neq (0, 0)$, perchè prodotto di funzioni continue. Verifichiamo la continuità nell'origine. Sfruttando il fatto che $\log(1+s) \leq s$ per $s \geq 0$, abbiamo

$$0 \leq f(x, y) \leq \frac{|x|y^2}{\sqrt{x^2+2y^2}} \leq \frac{|x|y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

e passando a coordinate polari, si vede (verifica) che il membro destro, e quindi f , tende a zero quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

La funzione risulta derivabile (con derivate continue, e quindi differenziabile), fuori dall'asse delle ordinate $x = 0$. Controlliamo la derivabilità in un generico punto $P := (0, y_0)$ con $y_0 \neq 0$. La derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}(P)$ non esiste, in quanto

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h, y_0) - f(0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\log(1 + hy_0^2)}{h\sqrt{h^2 + 2y_0^2}} = \frac{|y_0|}{\sqrt{2}}$$

mentre

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h, y_0) - f(0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\log(1 - hy_0^2)}{h\sqrt{h^2 + 2y_0^2}} = -\frac{|y_0|}{\sqrt{2}}.$$

Quindi, non coincidendo i due limiti sopra, f non è derivabile nei punti $P := (0, y_0)$ con $y_0 \neq 0$ (e quindi neppure differenziabile). Controlliamo cosa accade nell'origine: visto che lungo gli assi coordinati la funzione vale costantemente 0, f risulta derivabile in $(0, 0)$ con gradiente nullo. Risulta inoltre differenziabile grazie al fatto che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log(1 + |x|y^2)}{\sqrt{x^2 + 2y^2}\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

L'ultima uguaglianza è giustificata dalle seguenti:

$$0 \leq \frac{\log(1 + |x|y^2)}{\sqrt{x^2 + 2y^2}\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{|x|y^2}{x^2 + y^2} \leq |y| \frac{|x|^2 + |y|^2}{2(x^2 + y^2)} = \frac{|y|}{2} \rightarrow 0.$$

Esercizio 2: Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x \leq y \leq -2x, |x - y| \leq 3\};$$

si dica se Ω è limitato, se è compatto, e se ne calcoli la misura di Peano-Jordan.

Siano $E, F \subseteq \mathbb{R}^3$ gli insiemi definiti come

$$\begin{aligned} E &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega\} \\ F &:= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, |z| < |x - y|\}. \end{aligned}$$

Si dica quali tra E, F sono limitati e quali compatti. Sia

$$f(x, y, z) := -\frac{x + y}{1 + z^2};$$

si dimostri che f ammette minimo assoluto sull'insieme E .

Soluzione: Dal primo vincolo che definisce Ω otteniamo che $x \leq 0$. Dalla seconda condizione che $-3 \leq x - y \leq 3$ che implica che $y \leq x + 3 \leq 3$. Pertanto sia x che y sono limitati, ed essendo Ω chiuso sarà anche compatto. Passiamo alle coordinate $u = x - y$, $v = x + y$, da cui

$$x = \frac{u + v}{2}, \quad y = \frac{v - u}{2}.$$

L'insieme Ω prenderà la forma

$$\Omega := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq -\frac{u + v}{2}\}$$

ovvero

$$\Omega := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq -\frac{u}{3}\}.$$

Dalla seconda condizione u deve essere negativo, quindi Ω si riduce all'insieme normale

$$\Omega := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq u \leq 0, 0 \leq v \leq -\frac{u}{3}\}.$$

Visto che la mappa di cambio di variabile $\Phi(u, v) := (\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2})$ ha determinante Jacobiano pari a $\frac{1}{2}$, il calcolo dell'area di Ω si riduce all'integrale

$$\int_{-3}^0 \int_0^{-\frac{u}{3}} \frac{1}{2} dv du = - \int_{-3}^0 \frac{u}{6} du = \frac{3}{4}.$$

L'insieme E non è limitato, in quanto il valore di z può essere arbitrario. Invece F lo è in quanto Ω è limitato, e quindi le variabili x, y sono limitate, allora $|z| < |x - y| \leq 3$ implica che $-3 < z < 3$. Nessuno dei due però è compatto, in quanto E non è limitato ed F non è chiuso a causa del fatto che i punti in cui $|z| = |x - y|$ sono esclusi, pur essendo di accumulazione.

Si noti tuttavia che E è chiuso. La funzione f è chiaramente non positiva su E , dal momento che $x + y \geq 0$; pertanto, per ogni $(x, y) \in \Omega$, la funzione (di una variabile) $g(z) = -\frac{x+y}{1+z^2}$ assume minimo in $z = 0$. Essendo ora Ω compatto, sia $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ il punto di minimo della funzione continua $-(x + y)$. Abbiamo dunque, per ogni $(x, y, z) \in E$,

$$f(\bar{x}, \bar{y}, 0) = -(\bar{x} + \bar{y}) \leq -(x + y) \leq -\frac{x + y}{1 + z^2} = f(x, y, z).$$

Concludiamo che $(\bar{x}, \bar{y}, 0)$ è un punto di minimo assoluto su E .

Esercizio 3: Si consideri successione di funzioni

$$f_n(x) = \arctan(\sqrt{n}x + n) - \frac{\pi}{2}.$$

Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ la successione converge puntualmente. Si studi convergenza uniforme su $\mathbb{R}$ e sulle semirette $(a, +\infty)$, con $a \in \mathbb{R}$.

Possiamo dire che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge puntualmente su $\mathbb{R}$?

Soluzione: Per ogni $x \in \mathbb{R}$, il numero $\sqrt{n}x + n$ tende a $+\infty$ (attenzione, anche se x è negativo). Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0,$$

e la successione tende puntualmente a zero. La convergenza non è uniforme su tutto $\mathbb{R}$, in quanto, posto $x_n := -\sqrt{n}$, si ha

$$\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}} \geq |f_n(x_n)| = \frac{\pi}{2},$$

e $\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}}$ non tende a zero. D'altra parte, f_n è sempre negativa, e quindi $|f_n(x)| = \frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{n}x + n)$; la funzione $\arctan(\sqrt{n}x + n)$ è crescente in x , e quindi $|f_n|$ è decrescente e pertanto

$$\|f_n\|_{\infty, (a, +\infty)} = \lim_{x \rightarrow a^+} |f_n(x)| = \frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{n}a + n) \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Quindi c'è convergenza uniforme sulle semirette $(a, +\infty)$.

In merito alla serie, ci chiediamo se $\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan(\sqrt{n}x + n) - \frac{\pi}{2})$ sia convergente. Si ha (esercizio di Analisi 1)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(m)}{\frac{1}{m}} = 1,$$

e pertanto per il criterio del confronto asintotico la serie sarà sommabile se e solo se lo è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}x + n}.$$

Quest'ultima serie non è sommabile, dal momento che per ogni n abbastanza grande abbiamo $\frac{n}{2} \leq \sqrt{n}x + n$, da cui $\frac{1}{\sqrt{n}x + n} \geq \frac{2}{n}$ e allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}x + n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} = +\infty.$$

Esercizio 4: Trovare la soluzione u del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = u(t) + t \\ u(0) = \pi. \end{cases} \quad (1)$$

Sia w una soluzione massimale del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} w'(t) = w(t)^2 + t \\ w(0) = \pi, \end{cases}$$

e sia $I = (a, b)$ l'intervallo massimale dominio di w . Mostrare che

$$w(t) > u(t) \quad \text{se } t \in I, t > 0,$$

dove u è la soluzione di (1).

Soluzione: L'equazione differenziale in questione è lineare del primo ordine, e la soluzione è data dalla formula

$$u(t) = e^{A(t)} \left(\int b(s) e^{-A(s)} ds + c \right),$$

dove $a(t) = 1$, $b(t) = t$, e A è una primitiva di a , ovvero $A(t) = t$. Pertanto

$$u(t) = e^t \left(\int s e^{-s} ds + c \right) = e^t (-te^{-t} - e^{-t} + c) = -t - 1 + ce^t,$$

e imponendo $u(0) = \pi$ otteniamo $c = \pi + 1$, e quindi

$$u(t) = (\pi + 1)e^t - t - 1.$$

Per rispondere al secondo quesito, osserviamo anzitutto che la derivata di w è non negativa, quindi w sarà non decrescente, ed essendo $w(0) = \pi$ otteniamo $w(t) \geq \pi$ per $t \geq 0$. Pertanto abbiamo anche $w(t)^2 > w(t)$ per $t \geq 0$, e allora possiamo scrivere

$$w'(t) = w(t)^2 + t > w(t) + t.$$

Segue dal Teorema del confronto che $w(t) > u(t)$ per $t > 0$.

Esercizio 5: Si consideri la funzione $f(x, y, z) = 3xy - z^2$ e se ne determinino massimi e minimi assoluti (se esistono) sull'insieme $D := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Soluzione: Una possibile soluzione è utilizzare i moltiplicatori di Lagrange (esercizio). Alternativamente, utilizzando il vincolo $z^2 = 1 - x^2 - y^2$ possiamo sostituire nella funzione e ottenere che

$$f(x, y, z) = 3xy + x^2 + y^2 - 1,$$

con la condizione che $x^2 + y^2 = 1 - z^2 \leq 1$. Utilizzando la disuguaglianza $2ab \leq a^2 + b^2$, otteniamo

$$f(x, y, z) \leq \frac{3x^2}{2} + \frac{3y^2}{2} + x^2 + y^2 - 1 = \frac{5}{2}(x^2 + y^2) - 1 \leq \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}.$$

Visto che tutte le disuguaglianze precedenti diventano uguaglianze se e solo se $x = y$ e $z = 0$ (quindi $x^2 + y^2 = 1$), otteniamo che i punti $P = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ e $Q = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$ soddisfano $f(P) = f(Q) = \frac{3}{2}$ e sono quindi massimi assoluti.

Similmente, grazie alla disuguaglianza $2ab \geq -a^2 - b^2$ abbiamo

$$f(x, y, z) \geq -\frac{3x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} + x^2 + y^2 - 1 = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - 1 \geq -\frac{3}{2},$$

e le disuguaglianze precedenti sono tutte uguaglianze se e solo se $x = -y$ e $z = 0$ (quindi $x^2 + y^2 = 1$), ottenendo che i punti $R = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ e $S = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$ soddisfano $f(R) = f(S) = -\frac{3}{2}$ e sono minimi assoluti.