

Primo appello, 19/06/24, Soluzioni

Esercizio 1: Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \log\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)(x^2 + 2y^2) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dire se e dove f è continua, derivabile e differenziabile.

Soluzione: Iniziamo a controllare la continuità in $(0, 0)$ (altrove f è continua). Ponendo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ abbiamo

$$\log\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\rho^2 \leq |f(x, y)| \leq \log\left(\frac{1}{\rho^2}\right)2\rho^2$$

e quindi

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \log\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\rho^2 = \lim_{\rho \rightarrow 0} 2|\log(\rho)|\rho^2 = 0.$$

Vediamo ora se f è derivabile in $(0, 0)$: abbiamo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 \log h}{h} = 0,$$

e similmente

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h^2 \log h}{h} = 0,$$

da cui risulta $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$. Per verificare la differenziabilità dobbiamo invece controllare che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

Ovvero

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \log\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

e sfruttando che

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{2x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

abbiamo che il limite precedente è equivalente a

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \log\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\rho = \lim_{\rho \rightarrow 0} 2|\log(\rho)|\rho = 0.$$

Esercizio 2: Siano $D, E, F \subset \mathbb{R}^3$ gli insiemi definiti da

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 - 2z \leq x + y \leq 1 - z\},$$

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 - 2z \leq x - y \leq 1 - z\},$$

$$F = D \cap E.$$

Si dica quali tra D, E, F sono limitati e si calcoli

$$\int_F e^{-z} dx dy dz.$$

Si calcolino massimi e minimi relativi di $f(x, y, z) = z + x^2 - y^2$ su D .

Soluzione: Notiamo subito che i punti della forma $P_n := (1 - n, 0, n)$ appartengono a D , ad E e quindi anche ad F . Essendo ora la successione P_n non limitata, non saranno limitati neppure gli insiemi sopra.

Calcoliamo ora l'integrale in questione, e a questo scopo definiamo $t = x + y$ e $s = x - y$, così da avere $x = \frac{s+t}{2}$ e $y = \frac{t-s}{2}$; la mappa $\Phi(t, s) = (\frac{s+t}{2}, \frac{t-s}{2}) = (x, y)$ ha gradiente

$$\nabla \Phi(t, s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

il cui determinante è $-\frac{1}{2}$. Con questo cambio di variabile l'integrale diventa

$$\int_F e^{-z} dx dy dz = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \int_{1-2z}^{1-z} \int_{1-2z}^{1-z} e^{-z} ds dt dz = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} z^2 e^{-z} dz.$$

Quest'ultimo si può integrare due volte per parti e il risultato è 1 (facile conto di Analisi 1).

Rimane da cercare massimi e minimi di $f(x, y, z) = z + x^2 - y^2$ in D . Tali punti vanno cercati sul bordo, in quanto il gradiente $\nabla f = (2x, -2y, 1)$ non si annulla mai e quindi non ci sono punti critici all'interno di D . Impostiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange nel caso in cui $x + y + z - 1 = 0$:

$$\begin{cases} 2x = \lambda \\ -2y = \lambda \\ 1 = \lambda \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

la cui unica soluzione è $P_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$. Nel caso del vincolo $x + y + 2z - 1 = 0$ il sistema è

$$\begin{cases} 2x = \lambda \\ -2y = \lambda \\ 1 = 2\lambda \\ x + y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

la cui unica soluzione è $P_2 = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$. Nel caso in cui siamo su entrambi i vincoli, abbiamo $z = 0$, $x + y = 1$ e vogliamo i massimi e minimi di $x^2 - y^2$ sull'insieme $\{x + y = 1\}$, da cui

$$\begin{cases} 2x = \lambda \\ -2y = \lambda \\ x + y = 1 \end{cases} \quad (3)$$

che non ammette soluzioni. Ora, in P_1 e P_2 abbiamo $f(P_1) = 1$ e $f(P_2) = \frac{1}{2}$. Entrambi questi punti sono di sella: infatti, per P_1 prendiamo $\delta > 0$ e consideriamo il punto $Q = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - \delta, 1 + \delta)$. Se δ è piccolo, Q è arbitrariamente vicino a P_1 , si verifica che $Q \in D$, e vale

$$f(Q) = 1 + \delta + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \delta^2 - \delta = 1 - \delta^2 < f(P_1),$$

e quindi P_1 non è di minimo locale. Similmente, prendendo il punto $Q = (\frac{1}{2} - \delta, -\frac{1}{2}, 1 + \delta)$, ancora si ha $Q \in D$ ma

$$f(Q) = 1 + \delta^2 > f(P_1),$$

e P_1 non può essere nemmeno di massimo relativo. In modo analogo si può procedere per P_2 , considerando prima $Q = (\frac{1}{4} - 2\delta, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \delta) \in D$ e

$$f(Q) = \frac{1}{2} + 4\delta^2 > f(P_2)$$

e se invece $Q = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4} - 2\delta, \frac{1}{2} + \delta) \in D$ abbiamo

$$f(Q) = 1 - 4\delta^2 < f(P_2)$$

e così anche P_2 è un punto di sella.

Esercizio 3: Si consideri la serie di funzioni

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} e^{nx-n}.$$

Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie converge puntualmente. Si dimostri che la serie converge uniformemente su $(-\infty, 1]$.

Soluzione: Poniamo $y = e^{x-1}$, in modo che la serie diventi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} y^n,$$

che è una serie di potenze. Il suo raggio di convergenza R sarà dato da

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{1+n^2}} = 1.$$

Pertanto avremo convergenza puntuale se $|y| < 1$ (che corrisponde a richiedere che $e^{x-1} < 1$, ovvero $x \in (-\infty, 1)$). Controlliamo cosa accade quando $|y| = 1$. Se $y = -1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} (-1)^n$ che converge per il criterio di Leibniz, mentre se $y = 1$ la serie converge perchè $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$. Quindi c'è convergenza puntuale anche per $|y| = 1$, e pertanto la serie iniziale converge puntualmente per $x \in (-\infty, 1]$, il valore 1 corrispondendo al caso $1 = y = e^{x-1}$. Mostriamo ora che la convergenza è uniforme su questa semiretta: basta osservare che la convergenza della serie è totale, in quanto $\|e^{x-1}\|_{\infty, (-\infty, 1]} = 1$, e quindi

$$\left\| \frac{1}{1+n^2} e^{nx-n} \right\|_{\infty, (-\infty, 1]} = \frac{1}{1+n^2}$$

la cui serie converge.

Esercizio 4: Si trovino le soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = (2t^2 + 1)u(t) \\ u(0) = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} v'(t) = \frac{v(t)}{t} - t \\ v(-1) = -1. \end{cases}$$

Soluzione: Il primo problema di Cauchy è a variabili separabili

$$\frac{u'}{u} = 2t^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \log(|u|) = \frac{2}{3}t^3 + t + c,$$

e quindi $|u(t)| = \alpha e^{\frac{2t^3}{3} + t}$; imponendo $u(0) = 1$ concludiamo $u(t) = e^{\frac{2t^3}{3} + t}$. Il secondo problema di Cauchy contiene un'equazione lineare; ponendo $a(t) = \frac{1}{t}$ e $b(t) = -t$ la soluzione è data da

$$v(t) = e^{A(t)} \left(\int b(s) e^{-A(s)} ds + c \right)$$

dove $A(t) = \int a(s) ds = \log |t|$. Avremo quindi

$$v(t) = |t| \left(- \int \frac{s}{|s|} ds + c \right) = |t|(-|t| + c),$$

e imponendo $v(-1) = -1$ concludiamo $c = 0$ e $v(t) = -t^2$.

Esercizio 5: Per ogni n numero naturale positivo sia $\phi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$\phi_n(t) = (-1)^n (t^2 - t)^{2(n + \frac{t}{n})}.$$

Studiare al tendere di n a $+\infty$ la convergenza puntuale e uniforme della successione (ϕ_n) .

Soluzione: Notiamo anzitutto che per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha che $n + \frac{t}{n} \rightarrow +\infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Quindi, se $|t^2 - t| < 1$ abbiamo che $\phi_n(t) \rightarrow 0$, se $|t^2 - t| > 1$ la successione non converge perchè $(t^2 - t)^{2(n + \frac{t}{n})} \rightarrow \infty$. Infine, se $|t^2 - t| = 1$ la successione non converge perchè coincide con $(-1)^n$. Per cui la convergenza è puntuale se e solo se $|t^2 - t| < 1$, ovvero se e solo se $t \in (\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$. Inoltre, il limite puntuale su quest'insieme sarà $\phi(t) = 0$.

Studiamo la convergenza uniforme: affinchè ϕ_n converga uniformemente a $\phi = 0$ su $A \subset (\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ bisogna che

$$\|\phi_n\|_{\infty, A} \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Mostriamo che se $A \subset [a, b] \subset (\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$ allora la convergenza è uniforme, mentre se A ha come punti di accumulazione $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ oppure $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, la convergenza non è uniforme. Indichiamo con $\alpha := \max\{|t^2 - t| : t \in [a, b]\}$; nel primo caso avremo $\alpha < 1$, e quindi per ogni t si avrà

$$|\phi_n(t)| = |t^2 - t|^{2(n + \frac{t}{n})} \leq \alpha^{2(n + \frac{t}{n})} \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty,$$

e quindi anche $\|\phi_n\|_{\infty, A} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Nel caso in cui invece A contiene $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ oppure $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, indichiamo con $\beta := \sup\{x : x \in A\}$, e avremo $\alpha := \sup\{|t^2 - t| : t \in A\} = 1$. Quindi, essendo $|t^2 - t| \leq 1$,

$$|\phi_n(t)| = |t^2 - t|^{2(n+\frac{t}{n})} \geq |t^2 - t|^{2(n+\frac{\beta}{n})} \quad \Rightarrow \quad \|\phi_n\|_{\infty, A} \geq 1^{2(n+\frac{\beta}{n})} = 1.$$

Pertanto $\|\phi_n\|_{\infty, A}$ non tende a zero, e abbiamo concluso.