

Secondo appello Settembre, 24/09/24

Esercizio 1: Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y) = |x| + |y| - \sin(|x| + |y|)$. Dire se e dove f è continua, derivabile e differenziabile.

Soluzione: Essendo composizione di funzioni continue, f è continua. Nei 4 quadranti è anche composizione di funzioni differenziabili, e quindi tale è f . Bisogna considerare cosa accade sugli assi cartesiani. Mettiamoci in un punto $P := (x, 0)$ dell'asse x , abbiamo

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x, h) - f(x, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|x| + h - \sin(|x| + h) - |x| + \sin(|x|)}{h} = 1 - \cos(|x|)$$

mentre

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x, h) - f(x, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|x| - h - \sin(|x| - h) - |x| + \sin(|x|)}{h} = -1 + \cos(|x|)$$

e affinché esista $\frac{\partial f}{\partial y}$ bisogna che questi due limiti coincidano. Questo si verificherà se e solo se $1 - \cos(|x|) = 0$, ovvero se e solo se $x \in \pi\mathbb{Z}$, e in tal caso avremo $\frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0$. Per quanto riguarda la derivata rispetto a x , se $x > 0$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x + h - \sin(x + h) - x + \sin(x)}{h} = 1 - \cos(x) = 0,$$

e similmente se $x < 0$ avremo $\frac{\partial f}{\partial x}(P) = 0$. Infine, se $x = 0$ avremo

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \frac{h - \sin(h)}{h} = 0,$$

e similmente $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0$ da cui $\frac{\partial f}{\partial x}(P) = 0$.

Abbiamo quindi scoperto che sull'asse x la funzione risulta derivabile se e solo se $x \in \pi\mathbb{Z}$, e in tal caso il gradiente è nullo. Stesse conclusioni possiamo trovare sull'asse y , ovvero f è derivabile in $(0, y)$ se e solo se $y \in \pi\mathbb{Z}$.

Rimane da controllare se nei punti sopra trovati la funzione è differenziabile. Sia allora $P := (\bar{x}, 0)$ un punto con $\bar{x} = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$ (la verifica sull'asse delle y è identica). Supponiamo anche $n \geq 0$ (altro caso identico) e scriviamo

$$\frac{f(\bar{x} + h, k) - f(\bar{x}, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{h + |k| - \sin(n\pi + h + |k|)}{\sqrt{h^2 + k^2}},$$

e ora se n è pari, possiamo sviluppare $\sin(n\pi + h + |k|) = h + |k| + o(h) + o(|k|)$ e

$$\frac{h + |k| - \sin(n\pi + h + |k|)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{o(h) + o(|k|)}{\sqrt{h^2 + k^2}},$$

mentre se n è dispari $\sin(n\pi + h + |k|) = -h - |k| + o(h) + o(|k|)$ da cui

$$\frac{h + |k| - \sin(n\pi + h + |k|)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{2h + 2|k| + o(h) + o(|k|)}{\sqrt{h^2 + k^2}}.$$

Nel primo caso (n pari)

$$\left| \frac{f(\bar{x} + h, k) - f(\bar{x}, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq \frac{|o(h)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} + \frac{|o(|k|)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq \frac{|o(h)|}{|h|} + \frac{|o(|k|)|}{|k|} \rightarrow 0,$$

quando $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. Quindi f è anche differenziabile nei punti della forma $(n\pi, 0)$ con n pari. Se n è dispari il limite non fa zero, in quanto la quantità

$$\frac{2h + 2|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

tende a 1 se per esempio $h = \frac{1}{j}$, $k = 0$ e $j \rightarrow \infty$. Concludiamo che f è differenziabile solo nei punti $(n\pi, 0)$ e $(0, n\pi)$ con n intero pari.

Esercizio 2: Dati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq |y|, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}, \\ D_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}, \\ D_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}, \\ D_4 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq |y|\}, \end{aligned}$$

stabilire quali di essi risultano limitati. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{(1 - e^{-|x|})(1 - e^{-|y|})}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} & \text{se } (x, y, z) \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Stabilire, motivando adeguatamente le proprie affermazioni, se e quali tra gli integrali impropri

$$\int_{D_i} f(x, y, z) dx dy dz \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

esistono finiti.

Soluzione: D_1 è limitato in quanto la condizione $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ assicura che $\|(x, y, z)\| \leq 1$. Per lo stesso motivo, anche D_2 è limitato. Gli altri due insiemi non lo sono, in quanto i punti $(0, 0, T)$ appartengono ad essi per ogni valore di $T > 1$.

Grazie alla disuguaglianza $1 - t \leq e^{-t}$, valida per $t \in [0, 1]$, abbiamo, per $(x, y, z) \in D_2$,

$$0 \leq f(x, y, z) \leq \frac{|x||y|}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},$$

e quindi (usando coordinate sferiche)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{D_2} f(x, y, z) dx dy dz \leq \int_{D_2} \frac{|x||y|}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} dx dy dz \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 |\cos \varphi| \frac{\rho^2 \cos^2 \varphi |\sin \theta \cos \theta|}{\rho^4} d\rho d\theta d\varphi \leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 1 d\rho d\theta d\varphi = 2\pi^2, \end{aligned}$$

e l'integrale è finito. Usando che $1 - e^{-t} \leq 1$ per ogni $t \geq 0$, possiamo anche stimare

$$0 \leq f(x, y, z) \leq \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

da cui, sempre con coordinate sferiche, stimiamo

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{D_3} f(x, y, z) dx dy dz \leq \int_{D_3} \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} dx dy dz \\ &\leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_1^\infty \frac{\rho^2 |\cos \varphi|}{\rho^4} d\rho d\theta d\varphi \leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_1^\infty \frac{1}{\rho^2} d\rho d\theta d\varphi = 2\pi^2. \end{aligned}$$

Quindi anche questo integrale esiste finito. Infine, se l'integrale esiste finito su D_2 e su D_3 , esisterà finito su tutto $\mathbb{R}^3$, dal momento che $\mathbb{R}^3 = D_2 \cup D_3$ (visto che $f \geq 0$). Quindi esisterà finito su qualsiasi sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$, e come conseguenza anche su D_1 e D_4 .

Esercizio 3: Per $n > 0$ sia $g_n : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$g_n(t) = \begin{cases} \left(\frac{\log(1 + |1 - t|)}{|1 - t|} \right)^n + t(1 - t)^{n^2} & \text{se } t \neq 1, \\ 1 & \text{se } t = 1. \end{cases}$$

- (i) Studiare la convergenza puntuale ed uniforme di (g_n) su $[0, +\infty)$;
- (ii) Stabilire se esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{1-1/n} g_n(t) dt$. Se esiste, calcolarlo.

Soluzione: Per $x > 0$ si ha $0 < \log(1 + x) < x$; quindi vale

$$0 < \frac{\log(1 + |1 - t|)}{|1 - t|} < 1 \quad \forall t \neq 1.$$

Di conseguenza, per ogni $t \neq 1$ abbiamo

$$\left(\frac{\log(1 + |1 - t|)}{|1 - t|} \right)^n \rightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow \infty$. In merito al termine $t(1 - t)^{n^2}$, si ha $|1 - t| < 1$ se e solo se $t \in (0, 2)$. Per questi valori di t la potenza $(1 - t)^{n^2}$ tende a zero quando $n \rightarrow \infty$, mentre se $t = 0$ si ha sempre $t(1 - t)^{n^2} = 0$. Per $t \geq 2$ è facile vedere che $t(1 - t)^{n^2}$ ha segno $+$ se n è pari, ed è negativo per n dispari, mentre $|1 - t| \geq 2$, e quindi il termine $t(1 - t)^{n^2}$ non converge per nessun $t \geq 2$. Concludiamo che il limite puntuale di g_n esiste solo se $t \in [0, 2)$, e coincide con

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq 1, \\ 1 & \text{se } t = 1. \end{cases}$$

Non essendoci quindi convergenza puntuale su $[0, \infty)$, non c'è neppure convergenza uniforme (notare che anche se ci mettiamo su $[0, 2)$ la convergenza a g non è uniforme, perchè g non è continua, mentre le g_n lo sono).

Studiamo ora la convergenza dell'integrale. Un esercizio semplice mostra che $t(1-t)^{n^2}$ tende uniformemente a 0 su $[0, 1]$. Quindi anche l'integrale di tale funzione su $[0, 1]$ tenderà a zero. Concludiamo che $\int_0^{1-1/n} t(1-t)^{n^2} dt$ tende a zero, visto che è non negativo e $\leq$ di $\int_0^1 t(1-t)^{n^2} dt$.

D'altra parte la funzione $\frac{\log(1+|1-t|)}{|1-t|}$ vale $\log 2 < 1$ in $t = 0$, ed è non decrescente in $[0, 1]$ (basta fare la derivata e controllare che è ≥ 0). Quindi il massimo di $\frac{\log(1+|1-t|)}{|1-t|}$ su un intervallo $[0, a]$ con $a \in (0, 1)$ viene assunto in a (ed è pari a $\frac{\log(2-a)}{1-a} < 1$), per cui

$$\int_0^a \left(\frac{\log(1+|1-t|)}{|1-t|} \right)^n dt \leq \int_0^a \left(\frac{\log(2-a)}{1-a} \right)^n dt = a \left(\frac{\log(2-a)}{1-a} \right)^n \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$. Quindi possiamo concludere, per ogni $a \in (0, 1)$, che vale

$$\begin{aligned} \int_0^{1-1/n} \left(\frac{\log(1+|1-t|)}{|1-t|} \right)^n dt &\leq \int_0^a \left(\frac{\log(1+|1-t|)}{|1-t|} \right)^n dt + \int_a^1 \left(\frac{\log(1+|1-t|)}{|1-t|} \right)^n dt \\ &\leq a \left(\frac{\log(2-a)}{1-a} \right)^n + \int_a^1 1 dt = a \left(\frac{\log(2-a)}{1-a} \right)^n + (1-a) \rightarrow (1-a), \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$. Quindi il limite (se esiste) dell'integrale cercato è sempre $\leq (1-a)$ per ogni $a \in (0, 1)$, e mandando a a 1 otteniamo che tale limite deve esistere e deve essere nullo.

Esercizio 4: Trovare la soluzione u del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = -2u(t) + 3e^{-2t} \\ u(0) = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Sia w una soluzione massimale del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} w'(t) = (-2w(t) + 3e^{-2t})^2 \\ w(0) = 1, \end{cases}$$

e sia $I = (a, b)$ l'intervallo massimale dominio di w . Mostrare che

- w è non decrescente su $[0, b)$;
- w ha un punto di flesso orizzontale in un qualche valore $\bar{t} \in (0, b)$;
- w è strettamente crescente su $[0, b)$.

Soluzione: La prima equazione è lineare del primo ordine, e la soluzione si ottiene attraverso la formula

$$u(t) = e^{A(t)} \left(\int b(s) e^{-A(s)} ds + c \right),$$

dove $A(t) = -2t$ (una primitiva di -2) e $b(s) = 3e^{-2s}$. Si ottiene $u(t) = e^{-2t}(3t + c)$, e con il dato iniziale $u(0) = 1$ si conclude $u(t) = e^{-2t}(3t + 1)$.

In merito a w , essa è non decrescente perchè la sua derivata $(-2w(t) + 3e^{-2t})^2$ è non negativa. Tale derivata si annulla se e solo se $3e^{-2t} = 2w(t)$. Si noti che la funzione $3e^{-2t}$ è strettamente decrescente, tende a 0 per $t \rightarrow \infty$ e vale 3 in $t = 0$. Essendo $2w(0) = 2$ e w non decrescente, esisterà un unico punto $\bar{t} > 0$ per cui $3e^{-2\bar{t}} = 2w(\bar{t})$; tale punto sarà il flesso cercato. Infine, visto che il punto $\bar{t}$ è unico, la derivata di w si annulla in un unico punto e pertanto w sarà strettamente crescente (perchè?).

Esercizio 5: Si consideri la funzione

$$f(x, y, z) = \frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}$$

e se ne determinino massimi e minimi assoluti (se esistono) sull'insieme $D := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\}$.

Soluzione: Essendo su D la funzione f si riscrive come $f(x, y, z) = \frac{xy+yz+zx}{1+z^2}$, il cui gradiente è

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{y+z}{1+z^2}, \frac{x+z}{1+z^2}, \frac{x+y}{1+z^2} - \frac{2z(xy+yz+zx)}{(1+z^2)^2} \right)$$

Impostando il criterio dei moltiplicatori di Lagrange, dobbiamo allora risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{y+z}{1+z^2} = 2\lambda x \\ \frac{x+z}{1+z^2} = 2\lambda y \\ \frac{x+y}{1+z^2} = \frac{2z(xy+yz+zx)}{(1+z^2)^2} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Sottraendo le prime due equazioni otteniamo

$$2\lambda(x-y)(1+z^2) = (y-x)$$

da cui deduciamo due possibili condizioni: o si ha $x-y=0$ (ovvero $x=y$), oppure $2\lambda(1+z^2) = -1$ da cui $\lambda = -\frac{1}{2(1+z^2)}$. Nel primo caso dalla quarta equazione otteniamo le soluzioni $(x, y) = \pm(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e sostituendo nella terza equazione otteniamo

$$2x(1+z^2) = 2z(x^2 + 2zx) \quad \Rightarrow \quad 1+z^2 = z(x+2z) \quad \Rightarrow \quad 2z^2 \pm \sqrt{2}z - 2 = 0.$$

L'ultima equazione ha soluzioni $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\sqrt{2}$ se $x=y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ mentre ha soluzioni $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $-\sqrt{2}$ se $x=y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Abbiamo quindi trovato i 4 punti critici

$$\begin{aligned} P_1 &= (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}), & P_2 &= (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}), \\ P_3 &= (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), & P_4 &= (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Per questi punti, i corrispondenti valori della funzione sono

$$f(P_1) = f(P_3) = 1, \quad f(P_2) = f(P_4) = -\frac{1}{2}.$$

Dimostriamo che i primi due corrispondono a massimi assoluti e i secondi a minimi assoluti. Infatti, utilizzando che $2ab \leq a^2 + b^2$ (e c'è uguaglianza se e solo se $a = b$), abbiamo

$$\frac{xy + yz + zx}{1 + z^2} \leq \frac{x^2 + y^2 + y^2 + z^2 + z^2 + x^2}{2 + 2z^2} = \frac{2 + 2z^2}{2 + 2z^2} = 1$$

con uguaglianza se e solo se $x = y = z$ (che corrisponde ai soli punti P_1 e P_3 , che saranno quindi i soli massimi assoluti). Inoltre, visto che $2ab \geq -a^2 - b^2$ (uguaglianza sse $a = -b$), abbiamo

$$\frac{xy + yz + zx}{1 + z^2} = \frac{xy + z(x + y)}{1 + z^2} \geq \frac{xy - \frac{z^2}{2} - \frac{(x+y)^2}{2}}{1 + z^2} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{z^2}{2}}{1 + z^2} = -\frac{1}{2},$$

con uguaglianza se e solo se $z = -(x + y)$. Quindi P_2 e P_4 sono minimi assoluti, ma non tutti.

Nel caso in cui invece avessimo avuto $\lambda = -\frac{1}{2(1+z^2)}$, sostituiamo questa condizione prima equazione, ottenendo $y + z = -x$ (ovvero ritroviamo la condizione necessaria e sufficiente affinché il punto in questione sia di minimo assoluto). Volendo, per ogni z è possibile (mettendo a sistema questa condizione con $x^2 + y^2 = 1$) trovare i corrispondenti valori di x e y per cui (x, y, z) sia di minimo assoluto. Lasciamo questo conto per esercizio.