

Secondo appello, 12/07/24

Esercizio 1: Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \sqrt{\frac{z^2}{x^2+y^2}} \arctan(x^2 + 2y^2) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dire se e dove f è continua, derivabile e differenziabile.

Soluzione: La funzione f è continua ovunque fuori dall'asse z . Utilizzando la disuguaglianza $|\arctan(t)| \leq t$, possiamo scrivere

$$|f(x, y, z)| \leq |z| \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq 2|z| \sqrt{x^2 + y^2},$$

e l'ultimo termine tende a zero quando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$; ne deduciamo che f è continua anche sull'asse z . Scrivendo

$$f(x, y, z) = |z| \frac{\arctan(x^2 + 2y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

si vede che f è derivabile e differenziabile fuori dall'asse z e fuori dal piano $\{z = 0\}$. Mettiamoci in un punto di tale piano, $P = (x_0, y_0, 0)$ con $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Allora

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0, y_0, z) - f(x_0, y_0, 0)}{z} = \frac{\arctan(x_0^2 + 2y_0^2)}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}},$$

mentre

$$\lim_{z \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0, y_0, z) - f(x_0, y_0, 0)}{z} = -\frac{\arctan(x_0^2 + 2y_0^2)}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.$$

Essendo diversi i due limiti sopra, non esisterà la derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial z}(P)$, e quindi f non sarà derivabile, e quindi nemmeno differenziabile.

Mettiamoci ora in un punto $Q = (0, 0, z_0)$ dell'asse z . Per definizione $f(0, 0, z) = 0$ per ogni z , e quindi le derivate parziali sono

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z}(Q) &= 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h, 0, z_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} |z_0| \frac{\arctan(h^2)}{h\sqrt{h^2}} = \lim_{h \rightarrow 0^+} |z_0| \frac{\arctan(h^2)}{h|h|} = |z_0|, \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h, 0, z_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} |z_0| \frac{\arctan(h^2)}{h\sqrt{h^2}} = \lim_{h \rightarrow 0^-} |z_0| \frac{\arctan(h^2)}{h|h|} = -|z_0|, \end{aligned}$$

quindi $\frac{\partial f}{\partial x}(Q)$ esiste (ed è uguale a 0) se e solo se $z_0 = 0$. In modo analogo si vede che $\frac{\partial f}{\partial y}(Q)$ esiste ed è uguale a zero se e solo se $z_0 = 0$. Ne deduciamo che f non è mai derivabile, a meno che $Q = (0, 0, 0)$, dove si ha

$$\nabla f(0, 0, 0) = (0, 0, 0).$$

Verifichiamo ora che è anche differenziabile in $(0, 0, 0)$: a tale scopo dobbiamo mostrare che

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{f(x,y,z) - f(0,0,0) - \nabla f(0,0,0) \cdot (x,y,z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 0.$$

L'argomento del limite (in modulo) è

$$\frac{|z \arctan(x^2 + 2y^2)|}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \leq \frac{|z|(x^2 + 2y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \leq \frac{|z|(2x^2 + 2y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2}} = 2|z|,$$

e visto che l'ultimo termine tende a zero quando $(x, y, x) \rightarrow (0, 0, 0)$, concludiamo che f è anche differenziabile nell'origine.

Esercizio 2: Siano $E, F, G \subseteq \mathbb{R}^3$ gli insiemi definiti come

$$E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \leq 1 - y^2\}$$

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq \sqrt{1 - y^2}, |y| \leq 1\}$$

$$G := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (z + x + y)^2 \leq 1\}.$$

Si dica quali tra E, F, G sono limitati, e si dica quali tra gli insiemi

$$E \cap F, \quad E \cap G, \quad F \cap G,$$

sono compatti. Si calcolino i massimi e minimi relativi e assoluti su G della funzione

$$f(x, y, z) := \frac{z^2 - x^2}{2 - (x + y + z)^2}.$$

Soluzione: Nessuno tra gli insiemi E, F e G , è limitato. Punti in E ed F possono avere qualsiasi valore della z (arbitrariamente grande), mentre l'insieme G contiene tutti i punti della forma $(n, -n, 0)$ per n arbitrario (e quindi grande a piacere). Inoltre si nota che $E \cap F = E$ (visto che $E \subset F$) e quindi anche esso non è limitato (dunque non è compatto). Anche $F \cap G$ non è limitato perchè contiene tutti i punti della forma $(-n, 0, n)$ con $n \geq 0$. Infine, l'insieme $E \cap G$ è chiuso e limitato (dunque compatto). Infatti è intersezione di due chiusi (quindi chiuso). Verifichiamo che è limitato: dalla condizione in E si ha $x^2 + y^2 \leq 1$ e dunque $|x| \leq 1, |y| \leq 1$. Dalla condizione in G abbiamo $|x + y + z| \leq 1$. Quindi per la disuguaglianza triangolare $|z| \leq |x + y + z| + |-x - y| \leq 1 + |x| + |y| \leq 3$. Anche il valore di z è quindi limitato, e $E \cap G$ è compatto.

Passiamo allo studio della funzione f su G . Intanto G può essere riscritto come

$$G := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq z + x + y \leq 1\}.$$

Cerchiamo i punti critici interni: a questo scopo calcoliamo il gradiente di f , che sarà

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{-2x(2 - (x + y + z)^2) - (z^2 - x^2)(2x + 2y + 2z)}{(2 - (x + y + z)^2)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{-(z^2 - x^2)(2x + 2y + 2z)}{(2 - (x + y + z)^2)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{2z(2 - (x + y + z)^2) - (z^2 - x^2)(2x + 2y + 2z)}{(2 - (x + y + z)^2)^2}, \end{aligned}$$

e imponendo che tutte e tre le derivate si annullino, troviamo

$$\begin{cases} -2x(2 - (x + y + z)^2) - (z^2 - x^2)(2x + 2y + 2z) = 0 \\ -(z^2 - x^2)(2x + 2y + 2z) = 0 \\ 2z(2 - (x + y + z)^2) - (z^2 - x^2)(2x + 2y + 2z) = 0. \end{cases}$$

Sostituendo la seconda equazione nelle altre due, otteniamo

$$\begin{cases} -2x(2 - (x + y + z)^2) = 0 \\ -(z^2 - x^2)(2x + 2y + 2z) = 0 \\ 2z(2 - (x + y + z)^2) = 0. \end{cases}$$

Sapendo che $2 - (x + y + z)^2$ non si annulla mai in G , la prima e terza equazione implicano necessariamente che $x = z = 0$. La seconda equazione non dà nessun'altra condizione su y , quindi tutti i punti della forma $(0, y, 0)$ sono punti critici (notare che $|y| < 1$ all'interno di G). Su questi punti si ha $f(0, y, 0) = 0$. Notando che in punti della forma $(x, y, 0)$ (per x arbitrariamente vicino a 0) si ha $f(x, y, 0) < 0$ mentre in punti della forma $(0, y, z)$ si ha $f(x, y, 0) > 0$, concludiamo che i punti critici appena trovati sono punti di sella.

Cerchiamo ora massimi e minimi sui due vincoli (bordo di G) dati da $\{x + y + z = 1\}$ e $\{x + y + z = -1\}$. Su entrambi i vincoli la funzione si semplifica e prende la forma

$$f(x, y, z) = z^2 - x^2.$$

Il criterio dei moltiplicatori di Lagrange allora richiede di risolvere i due sistemi

$$\begin{cases} -2x = \lambda \\ 0 = \lambda \\ 2z = \lambda \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x = \lambda \\ 0 = \lambda \\ 2z = \lambda \\ x + y + z = -1 \end{cases}$$

quindi gli unici punti critici sono $(0, 1, 0)$ sul primo vincolo e $(0, -1, 0)$ sul secondo. Essendo questi della forma $(0, y, 0)$ le stesse considerazioni di prima ci dicono che sono punti di sella. In definitiva, non ci sono punti di massimo o minimo relativo in G .

Esercizio 3: Si consideri successione di funzioni

$$f_n(x) = \sqrt[n]{\left(x - \frac{1}{n}\right)^2}.$$

Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ la successione converge puntualmente. Per ogni $\delta \in (0, 1)$ si studi convergenza uniforme sugli intervalli della forma $[\delta, 1]$ e sull'intervallo $[0, 1]$.

Possiamo dire che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f_n(x)$ converge uniformemente su $[0, 1]$? e su $[0, +\infty)$?

Soluzione: Per $x = 0$ si ha $f_n(0) = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}$ che tende a 1 quando $n \rightarrow \infty$. Se $x > 0$, per n sufficientemente grande avremo

$$0 \leq x - \frac{1}{n} \leq x \quad \Rightarrow \quad f_n(0) \leq f_n(x) \leq \sqrt[n]{x^2}.$$

Visto che sia $f_n(0) \rightarrow 1$ che $\sqrt[n]{x^2} \rightarrow 1$ avremo $f_n(x) \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$. Similmente, se $x < 0$ avremo che per n abbastanza grande

$$2x \leq x - \frac{1}{n} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad f_n(0) \leq f_n(x) \leq \sqrt[n]{4x^2},$$

e come prima si verifica che $f_n(x) \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$.

Passiamo ora allo studio della convergenza uniforme sull'intervallo $[\delta, 1]$; per n abbastanza grande (ovvero $n > 2/\delta$) avremo

$$\frac{\delta}{2} \leq x - \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall x \in [\delta, 1].$$

Questo implica che

$$\sqrt[n]{\frac{\delta^2}{4}} \leq f_n(x) \leq 1 \quad \forall x \in [\delta, 1],$$

e quindi

$$|f_n(x) - 1| \leq 1 - \sqrt[n]{\frac{\delta^2}{4}} \quad \forall x \in [\delta, 1].$$

Dal momento che il membro di destra dell'ultima espressione tende a zero, avremo che $f_n \rightarrow 1$ uniformemente su $[\delta, 1]$. Nel caso in cui invece si studia la convergenza su $[0, 1]$ la convergenza non è uniforme, perchè

$$\|f_n - 1\|_\infty \geq |f_n(\frac{1}{n}) - 1| = |0 - 1| = 1,$$

che non tende a zero.

Infine notiamo che $|f_n(x)| \leq 1$ per ogni $x \in [0, 1]$, e pertanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f_n(x)$ converge totalmente su $[0, 1]$ dal momento che $\frac{1}{n^2} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$ la cui serie converge.

Su $[0, +\infty)$ invece la serie non convergerà uniformemente. Prendiamo la successione $x_n = \frac{1}{n} + n^n$, per la quale $\frac{1}{n^2} f_n(x_n) = 1$. Quindi avremo

$$\left\| \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2} f_k \right\|_\infty \geq |f_n(x_n)| = 1,$$

e quindi la norma non tende a zero e la serie non converge uniformemente.

Esercizio 4: Sia α un numero reale positivo; si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u'(t) = \sqrt{|t|}u(t) + 2\sqrt{|t|} \\ u(\alpha) = 0. \end{cases}$$

Si trovi la soluzione per $\alpha = 1$ e $\alpha = -1$. Si trovi la soluzione per $\alpha = \frac{1}{n}$ e la si indichi con u_n . Studiare il limite puntuale e uniforme $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t)$.

Soluzione: L'equazione è a variabili separabili, e si ha $\frac{u'}{u+2} = \sqrt{|t|}$ da cui integrando

$$\log(|u+2|) = \frac{2}{3}t|t|^{\frac{1}{2}} + c.$$

Pertanto la soluzione generale dell'equazione differenziale soddisferà $|u + 2| = ce^{\frac{2}{3}t|t|^{\frac{1}{2}}}$. Se $\alpha = 1$ si avrà $2 = ce^{\frac{2}{3}}$ da cui $c = 2e^{-2/3}$, pertanto

$$u(t) = 2e^{\frac{2}{3}t|t|^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}} - 2.$$

Se invece $\alpha = -1$ avremo $c = 2e^{2/3}$, e allora

$$u(t) = 2e^{\frac{2}{3}t|t|^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}} - 2.$$

Infine, se $\alpha = \frac{1}{n}$ avremo $2 = ce^{\frac{2}{3n^{3/2}}}$, e dunque

$$u_n(t) = 2e^{\frac{2}{3}t|t|^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3n^{3/2}}} - 2.$$

Quando $n \rightarrow \infty$ chiaramente $u_n(t) \rightarrow 2e^{\frac{2}{3}t|t|^{\frac{1}{2}}} - 2 =: u_0(t)$. La convergenza sarà uniforme solo sugli insiemi limitati E , dal momento che

$$|u_n(t) - u_0(t)| = 2e^{\frac{2}{3}t|t|^{\frac{1}{2}}} (1 - e^{-\frac{2}{3n^{3/2}}}),$$

e la norma infinito di tale funzione è data da

$$\|2e^{\frac{2}{3}t|t|^{\frac{1}{2}}}\|_{\infty, E} (1 - e^{-\frac{2}{3n^{3/2}}})$$

che tende a zero se $\|2e^{\frac{2}{3}t|t|^{\frac{1}{2}}}\|_{\infty, E} < +\infty$, ma questo è vero solo sugli insiemi limitati (perchè t sarà limitato).

Esercizio 5: Si consideri il dominio

$$\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 1, -(y^2 + z^2) \leq x \leq 1\}.$$

Si dica se Ω è limitato, poi si calcoli il volume di Ω e gli integrali delle funzioni $f(x, y, z) = x$ e $g(x, y, z) = y$ su Ω .

Soluzione: Ω è limitato perchè dalla prima condizione $-1 \leq y \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1$, e dalla seconda $-2 \leq x \leq 1$. Passando a coordinate cilindriche tali che $y = \rho \cos \theta$, $z = \rho \sin \theta$, $x = x$ (come le classiche ma scambiando il ruolo delle varie variabili)

$$\int_{\Omega} dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\rho^2}^1 \rho dx d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho + \rho^3 d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) d\theta = \frac{3}{2}\pi.$$

Per gli integrali delle funzioni abbiamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} x dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\rho^2}^1 x \rho dx d\rho d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - \rho^4) \rho d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\frac{1}{2} - \frac{1}{6}) d\theta = \frac{\pi}{3}, \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} y dx dy dz &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\rho^2}^1 \rho^2 \cos \theta dx d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\rho^2 + \rho^4) \cos \theta d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (\frac{1}{3} + \frac{1}{5}) \cos \theta d\theta = 0. \end{aligned}$$