

Appello Febbraio, 19/02/24

Esercizio 1: Si considerino i due insiemi $C, P \subset \mathbb{R}^3$ definiti da

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 \leq 1\} \quad P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq z \leq 1\}.$$

- (a) Si dica se i due insiemi sono chiusi e se sono limitati;
- (b) Si calcoli il volume di $\Omega := C \cap P$ e si dica se tale insieme è compatto in $\mathbb{R}^3$;
- (c) Si calcolino massimi e minimi relativi e assoluti della funzione $f(x, y, z) = xy - z$ su Ω .
- (d) Si calcoli l'integrale su Ω della funzione $g(x, y, z) = e^{x^2+2y^2}$.

Soluzione: Entrambi gli insiemi sono chiusi, ma non limitati. Per vedere che C non è limitato basta considerare la successione di punti $P_n = (0, 0, n)$ che appartengono a C ma $|P_n| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Similmente, per l'insieme P è sufficiente prendere la successione $Q_n = (n, 0, 0)$.

Invece, l'insieme $C \cap P$ è chiuso e limitato (quindi compatto perchè siamo in $\mathbb{R}^3$). E' chiuso perchè intersezione di due chiusi. Per vedere che è limitato, sia $(x, y, z) \in P \cap C$. Allora

$$\|(x, y, z)\|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 1 + 1 = 2.$$

Essendo (x, y, z) arbitrario, questo mostra la limitatezza (abbiamo mostrato che $C \cap P \subset B_{\sqrt{2}}(0)$).

Il calcolo del volume $\text{vol}(C \cap P)$ si ottiene dall'integrale

$$\text{vol}(C \cap P) = \int_{C \cap P} 1 dx dy dz.$$

Consideriamo il cambio di variabile $x' = x$, $y' = \sqrt{2}y$, $z' = z$, il gradiente del quale ha determinante $\sqrt{2}$. Quindi otterremo

$$\text{vol}(C \cap P) = \int_{C \cap P} 1 dx dy dz = \sqrt{2} \int_{C \cap P} dx' dy' dz'.$$

Inoltre $C \cap P = \{(x', y', z') : |x'|^2 + |y'|^2 \leq 1, |z'| \leq 1\}$, e passando in coordinate cilindriche $x' = \rho \cos \theta$, $y' = \rho \sin \theta$, $z' = z'$, si avrà

$$\text{vol}(C \cap P) = \sqrt{2} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho d\rho d\theta dz' = 2\sqrt{2}\pi.$$

Veniamo ora al punto (c): la funzione in questione ha gradiente $\nabla f(x, y, z) = (y, x, -1)$ che non si annulla mai, quindi i punti di massimo e minimo vanno cercati sul bordo di Ω . Tale bordo si decompone in tre pezzi: $A_1 := \{x^2 + 2y^2 \leq 1, z = -1\}$, $A_2 := \{x^2 + 2y^2 = 1, z \in (-1, 1)\}$, $A_3 := \{x^2 + 2y^2 \leq 1, z = 1\}$. Su A_1 la funzione f coincide con $xy + 1$, il cui gradiente è (y, x) che si annulla solo in $x = 0, y = 0$. Tuttavia, visto che in un intorno di tale punto il prodotto xy assume valore sia positivo che negativo, il punto $x = 0, y = 0$ non sarà né di massimo né di minimo. Pertanto non ci sono punti di massimo o minimo

nell'interno di A_1 . Sul suo bordo invece dovremmo trovare i massimi e minimi della funzione $xy + 1$ sull'ellisse $\{x^2 + 2y^2 = 1\}$. Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, tale ricerca si riduce a risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 4\lambda y \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

Dalla prima e seconda equazione otteniamo $y = 8\lambda^2 x$ da cui o $y = 0$ (ma allora anche $x = 0$, e non troviamo soluzioni), oppure $\lambda = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Abbiamo allora le due soluzioni $y = \pm \frac{x}{\sqrt{2}}$ che portano entrambe, dall'ultima equazione, alle soluzioni $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $y = \pm \frac{1}{2}$. I punti corrispondenti sono allora $P_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, -1)$, $P_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -1)$, $P_3 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, -1)$, $P_4 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, -1)$.

In modo del tutto analogo, sull'ellisse A_3 si trovano i punti $P_5 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, 1)$, $P_6 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, 1)$, $P_7 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, 1)$, $P_8 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}, 1)$.

Infine sulla superficie A_2 non ci sono punti critici interni, perchè il metodo dei moltiplicatori di Lagrange porta al sistema impossibile

$$\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 4\lambda y \\ -1 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$$

Tornando ora ai punti P_i , $i = 1, \dots, 8$, si verifica facilmente che P_1 e P_4 sono massimi assoluti e P_6 e P_7 di minimo assoluto, mentre gli altri punti di sella (dettagli lasciati al lettore).

(d): Utilizzando le variabili x', y', z' e poi ρ, θ, z' del punto (b), l'integrale da calcolare è

$$\sqrt{2} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho e^{\rho^2} d\rho d\theta dz' = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} e^{\rho^2} \Big|_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta dz' = 2\pi\sqrt{2}(e-1).$$

Esercizio 2: Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = -e^t u^2 \\ u(1) = 2, \end{cases}$$

e si trovi la formula generale per le soluzioni dell'equazione differenziale $u''' = u$.

Soluzione: L'equazione differenziale del problema di Cauchy è a variabili separabili,

$$-\frac{u'}{u^2} = e^t \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{u(t)} = e^t + c.$$

Imponendo $u(1) = 2$ otteniamo $\frac{1}{2} = e + c$, quindi la soluzione è data da

$$u(t) = \frac{1}{e^t - e + \frac{1}{2}}.$$

L'equazione differenziale $u''' - u = 0$ è lineare a coefficienti costanti, e il polinomio caratteristico è $\lambda^3 - 1$, le cui radici sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Come è noto dalla teoria svolta a lezione, la soluzione generale avrà quindi la forma

$$u(t) = \alpha_1 e^t + e^{-\frac{t}{2}} \left(\alpha_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \alpha_3 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right).$$

Esercizio 3: Sia, per ogni $n \geq 1$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f_n(x) := nx(1-x)^n.$$

Si studi convergenza puntuale e uniforme della successione f_n su $[0, 1]$.

Soluzione: Nei punti $x = 0$ e $x = 1$ si ha $f_n(x) = 0$ per ogni n . Inoltre, per $x \in (0, 1)$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nx(1-x)^n = x \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n(1-x)^n \right) = 0,$$

come è facile verificare dopo il corso di Analisi 1. Quindi f_n tende puntualmente alla funzione $f = 0$ su $[0, 1]$. Vediamo se la convergenza è anche uniforme: a questo scopo calcoliamo

$$\|f_n\|_{\infty, [0,1]} = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)|,$$

e visto che f_n è nulla in 0 e 1 cerchiamo il suo massimo imponendo la derivata uguale a 0. Si ha $f'_n(x) = n(1-x)^n - n^2x(1-x)^{n-1} = n(1-x)^{n-1}(1-x-nx)$, e a parte la soluzione $x = 1$, f_n si annulla in $x = \frac{1}{n+1}$, che corrisponderà al punto di massimo. Quindi

$$\|f_n\|_{\infty, [0,1]} = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Il limite per $n \rightarrow \infty$ non è nullo (quindi non c'è convergenza uniforme), infatti

$$\frac{n}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{n}{n+1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{n}{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} = \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

che tende a $\frac{1}{e}$.

Esercizio 4: Si considerino le serie di funzioni

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n) - n}{nx^n}.$$

- (a) Si calcoli il raggio di convergenza R di g e si dica se g converge in $|x| = R$;
- (b) Si trovino i valori di $x \in \mathbb{R}^+$ per cui f converge;
- (c) Sull'insieme di convergenza puntuale di f trovato nel punto precedente, si dica se f converge uniformemente.

Soluzione: Il raggio di convergenza $R = 1$ si calcola semplicemente, $1/R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} = 1$. Per $x = \pm 1$ le serie non convergono, come è immediato verificare.

(b) Con il cambio di variabili $y = \frac{1}{x}$ la serie diventa una serie di potenze con coefficienti $\frac{\sin(n)-n}{n}$, e il raggio di convergenza è R dato da $1/R = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\frac{\sin(n)-n}{n}|}$. Per la disuguaglianza triangolare $n-1 \leq n - |\sin(n)| \leq |\sin(n) - n| \leq |\sin(n)| + n \leq n+1$. E quindi

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n-1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|\sin(n) - n|}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} = 1.$$

Pertanto $R = 1$ e la serie converge per $|y| < 1$, ovvero $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Per il valore $x = 1$ la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)-n}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - 1) = -\infty$, e quindi la serie non converge. Quindi i valori in $\mathbb{R}^+$ per cui f converge sono $x \in (1, \infty)$.

(c) Su tale insieme non c'è convergenza uniforme, perchè la serie diverge in $x = 1$. Infatti, essendo $S_m(x) := \sum_{n=1}^m \frac{\sin(n)-n}{nx^n}$ una funzione continua in $[1, \infty)$, se convergesse uniformemente ad f su $(1, \infty)$ si avrebbe $\|S_m - f\|_{\infty, (1, \infty)} \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$. Tuttavia, visto che f diverge per $x \rightarrow 1^+$, avremo che $\|S_m - f\|_{\infty, (1, \infty)} = +\infty$ per ogni $m \geq 1$.

Esercizio 5: Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y) = |x + y|^3$.

(a) Si dica se f è derivabile e se è differenziabile in $(1, 0)$;

(b) Si dica se è derivabile e se è differenziabile in $(0, 0)$.

Soluzione: La funzione f assume valore $(x+y)^3$ sull'insieme $P^+ = \{y \geq -x\}$, mentre $f(x, y) = -(x+y)^3$ per $(x, y) \in P^- = \{y \leq -x\}$. Essendo $(0, 1)$ appartenente all'interno del semipiano P^+ , f risulta derivabile e differenziabile in un intorno di $(0, 1)$, e anche in $(0, 1)$ stesso, visto che tale è la funzione $(x+y)^3$.

In merito al punto $(0, 0)$, esso si trova sul bordo dei due semipiani, e quindi un'analisi più raffinata va svolta. Sappiamo che sia la funzione $f^+(x, y) = (x+y)^3$ sia $f^-(x, y) = -(x+y)^3$ sono differenziabili in $(0, 0)$, ed entrambe hanno gradiente nullo

$$\nabla f^+(0, 0) = \nabla f^-(0, 0) = (0, 0).$$

Mostriamo che anche f è differenziabile con gradiente nullo, ovvero

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|f(x, y) - f(0, 0)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Essendo $f(0, 0) = 0$, dobbiamo provare che

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|f(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Ma visto che f coincide con f^+ su P^+ e con f^- su P^- , possiamo scrivere

$$\frac{|f(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{\max\{|f^+(x, y)|, |f^-(x, y)|\}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{|f^+(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{|f^-(x, y)|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

ed entrambi i termini a secondo membro tendono a zero perchè f^+ e f^- hanno gradiente nullo e sono differenziabili.